Bollettino
Unione Matematica Italiana

Demore Quilghini

Un teorema di unicità per un problema del tipo di Stefan.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.3, p. 270–278.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_3_270_0>

Un teorema di unicità per un problema del tipo di Stefan

Nota di DEMORE QUILGHINI (a Firenze) (*) (**)

Résumé. - *On démontre un théorème d'unicité pour un problème de Stefan dans l'hypothèse que la température critique soit une fonction du point où le changement de phase se produit.*

1. Posizione del problema.

Si consideri il sistema di equazioni:

$$D_\alpha\, a_{xx}(x,\ t) = a_t(x,\ t),\ 0 < t \leq T,\ 0 < x < h(t),\quad \left(a_\nu = \frac{\partial a}{\partial \nu}\right) \tag{1}$$

$$D_\beta\ b_{xx}(x,\ t) = b_t(x,\ t),\ 0 < t \leq T,\ h(t) < x < X, \tag{2}$$

$$h(0) = h_0,\quad 0 \leq h_0 \leq X \tag{3}$$

$$\lim_{x \to 0} a(x,\ t) = f(t),\quad 0 < t \leq T, \tag{4}$$

$$\lim_{x \to X} b(x,\ t) = \varphi(t),\quad 0 < t \leq T, \tag{5}$$

$$\lim_{t \to 0} a(x,\ t) = \Psi_1(x),\quad 0 < x < h_0, \tag{6}$$

(quest'ultima condizione non ha luogo se $h_0 = 0$),

$$\lim_{t \to 0} b(x,\ t) = \Psi_2(x),\quad h_0 < x < X, \tag{7}$$

(quest'ultima condizione non ha luogo se $h_0 = X$),

$$\Psi_1(h_0) = \Psi_2(h_0) = U(h_0), \tag{8}$$

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 5 giugno 1963.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del VI° Gruppo di Ricerca Matematica del C. N. R. presso l'istituto di Matematica « U. Dini » dell'Università di Firenze; viale G. B. Morgagni 67/a Firenze.

(9) $$\lim_{x \to h(t)-} a(x, t) = \lim_{x \to h(t)+} b(x, t) = U(h(t)), \ 0 < t \leq T,$$

(10) $$k_\alpha \lim_{x \to h(t)-} a_x(x, t) - k_\beta \lim_{x \to h(t)+} b_x(x, t) = l\rho \dot{h}(t), \ 0 < t \leq T,$$

nelle incognite funzioni $h(t)$ per $0 \leq t \leq T$, $a(x, t)$ per $0 < t \leq T$, $0 < x < h(t)$ e $b(x, t)$ per $0 < t \leq T$, $h(t) < x < X$, essendo $f(t)$, $\varphi(t)$, $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$ e $U(x)$ funzioni note dei loro argomenti mentre k_α, k_β, l, ρ, h_0 ed X sono delle costanti positive assegnate così come:

(11) $$D_\alpha = \frac{k_\alpha}{c\rho} \quad \text{e} \quad D_\beta = \frac{k_\beta}{c\rho} .$$

Come è noto ad un tale sistema di equazioni si perviene nello studio di un problema del tipo di STEFAN, (cfr. [1], cap. XI, pagg. 282-296, [2], [3] e [4]),[1] in un mezzo S materiale, omogeneo e termicamente isotropo, occupante uno strato piano indefinito di spessore X, $0 < X \leq \infty$, inizialmente nella fase α per $0 < x < h_0$, se $h_0 > 0$, e nella fase β per $h_0 < x < X$, se $h_0 < X$, nella ipotesi che la temperatura critica $U(P)$ alla quale si suppone avvenire il cambiamento di fase nel generico punto P di S sia funzione di P tramite la sua distanza dal piano origine di S, piano che qui abbiamo indicato come piano $x = 0$.

In questo tipo di problemi si ricercano soluzioni del sistema (1)-(10) nella classe H delle funzioni $h(t)$ assolutamente continue per $0 \leq t \leq T$ e nella classe V delle funzioni

$$v(x, t) = \begin{cases} a(x, t), \ 0 < t \leq T, \ 0 < x < h(t), \\ b(x, t), \ 0 < t \leq T, \ h(t) < x < X, \end{cases}$$

continue per $0 < t \leq T$, $0 \leq x \leq X$, derivabili almeno due volte rispetto ad x ed una volta rispetto a t con derivate continue per $0 < t \leq T$ e $0 \leq x \neq h(t) \leq X$.

In questa nota dimostreremo un teorema di unicità per la soluzione

$$h(t) \in H, \ v(x, t) \in V$$

(1) I numeri in neretto ed in parentesi quadre si riferiscono alla bibliografia posta al termine del lavoro.

del sistema (1)-(10) nella ipotesi che la funzione $U(x)$, la quale rappresenta la temperatura critica nei punti di ascissa x, sia una funzione continua non crescente di x e che le funzioni $f(t)$, $\varphi(t)$, $\Psi_1(x)$ e $\Psi_2(x)$ siamo tali che per le $v(x, t) \in V$ soddisfacenti al sistema (1)-(10) si abbia $v_x(x, t) > 0$.

Analogamente si può poi procedere se $U(x)$ è non decrescente e $v_x(x, t) < 0$.

Una tale condizione non è così restrittiva come può sembrare a priori, essa si verifica infatti in moltissimi problemi del tipo di STEFAN; ad esempio si verifica, oltre che nel caso classico studiato da NEUMANN, (cfr. loc. cit. in [1]), nei casi studiati in]3] ed in [4]; la stessa circostanza, e cioè che sia $v_x(x, t) > 0$, si verifica pure nei casi studiati in [5] pur avendosi ivi condizioni al contorno diverse da queste.

2. - Dimostrazione del teorema di unicità.

Per il sistema (1)-(10) sussiste il seguente teorema di unicità: *Se* $U(x)$ *è una funzione continua non crescente e le funzioni* $v(x, t) \in V$ *che soddisfano al sistema* (1)-(10) *sono tali che* $v_x(x, t) > 0$, $x \neq h(t)$, *allora la soluzione:*

$$h(t) \in H, \quad v(x, t) \in V$$

del sistema (1)-(10) *è unica.*

Supponiamo infatti, per assurdo, che il sistema (1)-(10) ammetta le due soluzioni distinte

$$\text{(I)} \quad h_1(t) \in H,\ 0 \leq t \leq T,\ v_1(x, t) = \begin{cases} a_1(x, t),\ 0 < t \leq T,\ 0 < x < h_1(t), \\ b_1(x, t),\ 0 < t \leq T,\ h_1(t) < x < X, \end{cases}$$

$$v_1(x, t) \in V,\ v_{1x}(x, t) > 0,\ v \neq h(t).$$

$$\text{(II)} \quad h_2(t) \in H,\ 0 \leq t \leq T,\ v_2(x,\ t) = \begin{cases} a_2(x,\ t) & 0 < t \leq T,\ 0 < x < h_2(t), \\ b_2(x,\ t), & 0 < t \leq T,\ h_2(t) < x < X, \end{cases}$$

$$v_2(x,\ t) \in V,\ v_{2x}(x,\ t) > 0,\ x \neq h_2(t)$$

Se le soluzioni (I) e (II) sono tra loro distinte deve necessariamente esistere, tenuto conto anche della (3) e della continuità di $h_1(t)$ e di $h_2(t)$. almeno un valore t', $0 < t' < T$, tale che $h_1(t') \neq h_2(t')$.

Supponiamo infatti che per ogni $t \in [0,\ T]$ sia $h_1(t) = h_2(t) = h(t)$.

In questa ipotesi, tenuto conto che il sistema:

$$D_\alpha\ a_{xx}(x,\ t) = a_t(x,\ t),\ 0 < t \leq T,\ 0 < x < h(t),$$

$$a(0,\ t) = f(t),\ 0 < t \leq T,$$

$$a(h(t),\ t) = U(h(t)),\ 0 < t \leq T,$$

$$a(x,\ 0) = \Psi_1(x),\ 0 < x < h_0,$$

supposte note le funzioni $h(t)$ e $U(h(t))$, ammette una sola soluzione nel campo delle funzioni continue e derivabili, con derivate continue, così come il sistema:

$$D_\beta\ b_{xx}(x,\ t) = b_t(x,\ t),\ 0 < t \leq T,\ h(t) < x < X,$$

$$b(h(t),\ t) = U(h(t)),\ 0 < t \leq T,$$

$$b(X,\ t) = \varphi(t),\ 0 < t \leq T,$$

$$b(x,\ 0) = \Psi_2(x),\ h_0 < x < X,$$

(cfr. [6], Ch. I, n° 1, pagg. 315-317, Ch. II. n i 17-18, pagg. 370-374) segue immediatamente $v_1(x,\ t) = v_2(x,\ t)$, $0 < t \leq T$, $0 \leq x \leq X$.

Ciò premesso sia t', $0 < t' < T$, tale che $h_1(t) \neq h_2(t')$ e supponiamo, ad esempio, che sia $h_1(t') < h_2(t')$.

In questa ipotesi, tenuto conto della continuità di $h_1(t)$ e di $h_2(t)$, esisterà un intervallo di ampiezza finita $\Delta t'$ intorno a t' e interno all'intervallo $[0, T]$, per il quale si ha:

$$h_1(t) < h_2(t), \quad t \in \Delta t' .$$

Da qui, tenuto conto che $U(x)$ è una funzione continua non crescente, segue:

$$U(h_1(t)) \geq U(h_2(t)), \quad t \in \Delta t' ,$$

quindi, tenuto conto della continuità di $v_1(x, t)$ e di $v_2(x, t)$. che $v_{1x}(x, t) > 0$, $x \neq h_1(t)$, $v_{2x}(x, t) > 0$, $x \neq h_2(t)$, e che, in forza della (4) e della (5), è $v_1(0, t) = v_2(0, t)$, $v_1(X, t), = v_2(X, t)$ mentre per la (9) è:

$$v_1(h_1(t), t) = U(h_1(t)), \quad v_2(h_2(t), t) = U(h_2(t)),$$

segue, per ogni $t \in \Delta t'$, l'esistenza di un intorno $(x'(t), x''(t))$ soddisfacente la limitazione:

(12) $$0 \leq x'(t) < h_1(t) < h_2(t) < x''(t) \leq X$$

per il quale, posto:

(13) $$w(x, t) = v_1(x, t) - v_2(x, t), \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, X],$$

si ha:

(14) $$w(x, t) > 0, \quad t \in \Delta t', \quad x'(t) < x < x''(t).$$

Ciò premesso distinguiamo due casi: o per ogni $t \in [0, t']$ e per ogni $x \in [0, X]$ è $w(x, t) \geq 0$, oppure vi sono delle coppie di valori $(\bar{x}, t)$ $\bar{x} \in [0, X]$ e $t \in [0, t']$, per le quali si ha $w(\bar{x}, t) < 0$.

Nel primo caso, e cioè per $w(x, t) \geq 0$, $t \in [0, t']$, $x \in [0, X]$, notiamo che non può esistere alcun valore $t'' \in [0, t']$ tale che $h_1(t'') >$

$> h_2(t'')$ che altrimenti, ragionando come per stabilire la (14), esisterebbero dei valori di $x \in [0,\ X]$ tali che $w(x,\ t'') < 0$.

Nel primo caso avremo perciò

$$h_1(t) \leq h_2(t) \quad t \in [0,\ t'] . \tag{15}$$

Ciò premesso si consideri la funzione di t

$$I(t) = \int_0^X w(x,\ t)dx \tag{16}$$

Tenuto conto anche della (14) avremo:

$$I(t') > 0. \tag{17}$$

D'altra parte dalla (16) si ha

$$\frac{dI(t)}{dt} = \int_0^X w_t(x,\ t)dx,$$

e quindi, tenuto conto della (15), della (I) e della (II), ricordando la (13) oltre al fatto che $v_1(x,\ t)$ e $v_2(x,\ t)$ soddisfano al sistema (1)-(10), si ha:

$$\frac{dI(t)}{dt} = D_\alpha \int_0^{h_1(t)} a_{1xx}(x,\ t)dx + D_\beta \int_{h_1(t)}^X b_{1xx}(x,\ t)dx - D_\alpha \int_0^{h_2(t)} a_{2xx}(x,\ t)dx -$$

$$- D_\beta \int_0^X b_{2xx}(x,\ t)dx.$$

Da qui, integrando per parti, ricordando la (10) sia per $v_{1x}(x,\ t)$ che per $v_{2x}(x,\ t)$, tenuto anche conto della (11) si ha:

$$\frac{dI(t)}{dt} = - D_\alpha v_{1x}(0,\ t) + D_\alpha v_{2x}(0,\ t) + D_\beta v_{1x}(X,\ t) - D_\beta v_{2x}(X,\ t) +$$

$$\frac{l}{c}[\dot{h}_1(t) - \dot{h}_2(t)],$$

ed anche infine dalla (13)

$$\frac{dI(t)}{dt} = - D_\alpha w_x(0,\ t) + D_\beta w_x(X,\ t) + \frac{l}{c}[\dot{h}_1(t) - \dot{h}_2(t).]$$

Da qui, tenuto conto che $I(0) = 0$, otteniamo infine

$$(18)\ I(t') = - D_\alpha \int_0^{t'} w_x(0,\ t)dt + D_\beta \int_0^{t'} w_x(X,\ t)\,dt + \frac{l}{c}[h_1(t') - h_2(t')].$$

Ma essendo $w(0,\ t) = w(X,\ t) = 0$ e $w(x,\ t) \geq 0$, $0 \leq x \leq X$, avremo $w_x(0,\ t) \geq 0$, $w_x(X,\ t) \leq 0$, perciò dalla (18), ricordando la (3) e che $h_1(t') < h_2(t')$, segue:

$$I(t') < 0$$

contro la (17). Perciò nel caso che risulti $w(x,\ t) \geq 0$ per $t \in [0,\ T]$ $x \in [0,\ X]$ non può esistere alcun valore di $t \in [0,\ T]$ per il quale risulti $h_1(t) < h_2(t)$.

Quindi se $h_1(t') < h_2(t')$, $0 < t' < T$, potrà al più verificarsi il secondo caso. Esisteranno cioè delle coppie $(\bar{x},\ \bar{t})$ di valori, $\bar{x} \in [0, X]$, $\bar{t} \in [0,\ t']$, tali che $w(\bar{x},\ \bar{t}) < 0$. Consideriamo allora, nel piano $x,\ t$, il rettangolo definito dalle limitazioni $0 \leq x \leq X$, $0 \leq t \leq T$, tenuto conto anche della (14) vi saranno in questo rettangolo delle regioni R di punti $P \equiv (x,\ t)$ tali che $w(x,\ t) \geq 0$ e delle regioni $\bar{R}$ di punti $\bar{P} \equiv (\bar{x},\ \bar{t})$ tali che $w(\bar{x},\ \bar{t}) < 0$. Dalla continuità di $w = v_1 - v_2$ segue poi che le regioni $\bar{R}$ sono separate dalle regioni R da linee continue nei punti delle quali è $w = 0$.

Fissato $t \in [0,\ T]$ si consideri sulla caratteristica t l'insieme $g = g(t)$ dei valori di $x \in [0,\ X]$ per i quali è $w(x,t) \geq 0$. Un tale insieme $g(t)$, intersezione della caratteristica t con le regioni R, se non è di misura nulla, sarà costituito, oltre che eventualmente, da un insieme di punti di misura nulla, da intervalli $[x_1,\ x_2]$. $0 \leq x_1 = x_1(t) < x_2 = x_2(t) \leq X$ per ognuno dei quali si ha

$$(19)\qquad \begin{aligned} &w(x,\ t) \geq 0,\ \ x_1 \leq x \leq x_2\,, \\ &w(x_1,\ t) = w(x_2,\ t) = 0\,. \end{aligned}$$

Osserviamo inoltre che per quei valori di $t \in [0, T]$ per i quali è $h_1 < h_2$ dell'insieme $g(t)$ fa parte, come segue immediatamente ragionando come per stabilire la (12) e la (14), anche un intervallo del tipo $(x'(t), x''(t))$ definito dalla (12) e dalla (14). Viceversa, e per rendercene conto basta ragionare in modo analogo. per quei valori di $t \in [0, T]$ per i quali è $h_2 < h_1$ esiste tutto un intorno $(\bar{x}'(t), \bar{x}''(t))$, $0 \leq \bar{x}'(t) < h_2(t) < h_1(t) < \bar{x}''(t) \leq X$ tale che $w(x, t) < 0$ per $\bar{x}'(t) < x < \bar{x}''(t)$, e perciò un tale intorno $(\bar{x}'(t), \bar{x}''(t))$ non fa parte dell'insieme $g(t)$.

Al variare di $t \in [0, T]$ le curve di equazione $x = x_1(t)$ e $x = x_2(t)$ sono necessariamente continue dovendo separare le regioni $\bar{R}$ dalle regioni R. Ciò premesso costruiamo la funzione

$$(16)_1 \qquad G(t) = \int_{g(t)} W(x, t) dx.$$

Tenuto conto della (14) avremo poi:

$$(17)_1 \qquad G(t') > 0.$$

Operiamo adesso sulla funzione $G(t)$ come abbiamo operato sulla funzione $I(t)$. Ricordando l'osservazione fatta sopra, per quei valori di $t \in [0, T]$ per i quali è $h_1(t) < h_2(t)$ avremo:

$$(20) \qquad \frac{dG(t)}{dt} = - D W_x(x_1(t), t) + D W(x_2(t), t) + \frac{l}{c} [\dot{h}_1(t) - \dot{h}_2(t)],$$

avendo indicato con $W_x(x_1(t), t)$ e $W_x(x_2(t), t)$ i contributi recati a $\frac{dG(t)}{dt}$ da $w_x(x, t)$ rispettivamente nei punti di ascissa $x_1(t)$ e nei punti di ascissa $x_2(t)$ e con D il coefficiente D_α o il coefficiente D_β a seconda che $x_1(t)$, $(x_2(t))$, è minore di $h_1(t)$ o è maggiore di $h_2(t)$.

Invece, sempre ricordando l'osservazione fatta sopra, per quei valori $t \in [0, T]$ eer i quali è $h_2 < h_1$ si ha:

$$\frac{dG(t)}{dt} = - D W_x(x_1(t), t) + D W_x(x_2(t), t),$$

con lo stesso significato per i simboli. Da quest'ultima e dalla (20), tenuto conto che $h_1(t)$ ed $h_2(t)$ sono funzioni assolutamente continue e che $\int [\dot{h}_1(t) - \dot{h}_2(t)]dt$ esteso all'insieme dei valori di $t \in [0, t']$ per i quali è $h_1 < h_2$ è uguale a $\int_0^{t'} [\dot{h}_1(t) - \dot{h}_2(t)]dt$, segue:

$$G(t') = -D\int_0^{t'} W_x(x_1(t), t)dt + D\int_0^{t'} W_x(x_2(t, t)dt + \frac{l}{c}[h_1(t') - h_2(t')]$$

Da qui, tenuto conto che in forza delle (19) è $W_x(x_1(t), t) \geq 0$ e $W_x(x_2(t), t \leq 0$ e che $h_1(t') < h_2(t')$ segue

$$G(t') < 0$$

contro la $(17)_1$. Perciò anche in questo secondo caso non può esistere alcun valore di $t \in [0, T]$ tale che $h_1(t) < h_2(t)$. Analogamente si prova poi che non esiste alcun valore di $t \in [0, T]$ tale che $h_1(t) > h_2(t)$.

Perciò è necessariamente $h_1(t) = h_2(t)$, $t \in [0, T]$ Da qui e dalla osservazione fatta all'inizio di questa dimostrazione segue il teorema.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. S. Carslaw; J. C. Jaeger, *Conduction of heat in solids,* II ed. Oxford 1959.

[2] G. Sestini, *Problemi di diffusione lineari e non lineari analoghi a quello di Stefan,* Con. del Sem. di Mat. dell'Università di Bari, n.i 55-56, Bologna 1960.

[3] A. Friedman, *Free boundary problems for parabolic equations, I. Melting of solids,* Journal of Math. and Mechanics, vol. 8, n° 4, 1959.

[4] D. Quilghini, *Un nuovo problema lineare unidimensionale del tipo di Stefan,* In corso di pubblicazione negli Annali di Mat. pura ed applicata.

[5] D. Quilghini, *Sul comportamento asintotico delle soluzioni di un problema del tipo di Stefan,* In corso di pubblicazione negli Atti del Sem. Mat. dell'Università di Modena.

[6] M. Gevrey, *Sur les équations aux dérivées du type paraboliques,* Journal de Math. pures at appliquées, Tome IX, Sixième série, 1913.