Bollettino
Unione Matematica Italiana

Guido Gotusso

Moti principali in un sistema con due gradi di libertà.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.3, p. 222–229.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_3_222_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Moti principali in un sistema con due gradi di libertà

Nota di GUIDO GOTUSSO (a Milano) (*) (**)

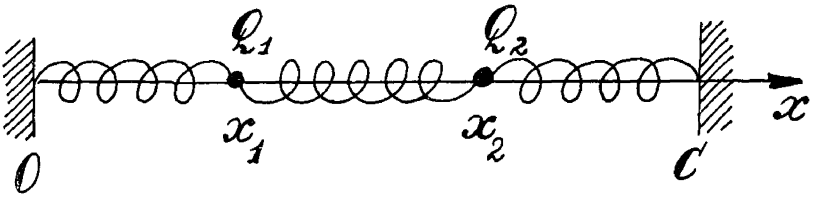
Sunto. - *Si veda: Introduzione.*

Introduzione. - Scopo della presente nota è di mostrare come la nozione di moti principali, estesa da ROSENBERG (1) a sistemi con due gradi di libertà a carattere non lineare, possa estendersi a sistemi affatto generali con due gradi di libertà purchè olonomi e con sollecitazione attiva conservativa.

Per comodità del lettore si richiamano i risultati che hanno condotto alla nozione di moti principali nel caso di sistemi lineari.

1. Un sistema con un grado di libertà e sollecitazione di richiamo lineare presenta frequenze proprie indipendenti dalla ampiezza. Se la sollecitazione di richiamo non è lineare, esistono generalmente ancora oscillazioni proprie in numero discreto, ma la frequenza dipende dall'ampiezza. In luogo del tradizionale diagramma di risonanza se ne ha allora uno in cui le spine dorsali sono curve anzichè rette.

2. Quando si considerano sistemi con due gradi di libertà, lo schema dell'oscillatore armonico viene sostituito dallo schema seguente:



(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 30 aprile 1963.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca Matematica n. 16 del C. N. R.

(1) ROSENBERG, *Sur le prblème des valeurs propres dans le domaine non linèaire*, « Centre de Rech. Scient. et Maritimes », 25-11-60.

e, se le ascisse di Q_1 e Q_2 si contano a partire dalle rispettive posizioni di equilibrio, dette m_1 e m_2 le masse e posto

$$x = x_1\sqrt{m_1} \quad ; \quad y = x_2\sqrt{m_2} \tag{1}$$

essendo lineari le caratteristiche delle molle, si ha per il potenziale U:

$$U = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) \leq 0 \quad ; \quad ac - b^2 < 0 \tag{2}$$

ed esistono, in corrispondenza a opportune condizioni iniziali, due moti, detti principali, così espressi:

$$\begin{cases} x = A \operatorname{sen}(\omega_1 t + \alpha_1) \\ y = B \operatorname{sen}(\omega_1 t + \alpha_1) \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = C \operatorname{sen}(\omega_2 t + \alpha_2) \\ y = D \operatorname{sen}(\omega_2 t + \alpha_2) \end{cases} \tag{3}$$

dove $\pm\omega_1$ e $\pm\omega_2$ sono soluzioni, sicuramente reali, dell'equazione:

$$\omega^4 + (a + c)\omega^2 + ac - b^2 = 0. \tag{4}$$

Il problema può anche interpretarsi con quello del moto del punto-immagine $P(x, y)$ nello spazio bidimensionale, che è il piano x, y. Per il principio di HÖLDER (EULERO-MAUPERTUIS), le traiettorie di P sono le curve per le quali:

$$\delta \int \sqrt{E + U}\, ds = 0 \tag{5}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \tag{5'}$$

mentre, successivamente, la legge oraria di P si trova, ad esempio, con l'integrale dell'energia utilizzando il legame ora trovato fra x e y.

Ebbene: è noto che ogni traiettoria di P è interna alla curva (ellisse):

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2E = 0 \tag{6}$$

dove E è l'energia totale; le traiettorie corrispondenti ai moti principali (3) sono gli assi dell'ellisse (6). Nei moti principali si

ha periodico passaggio di P per il punto 0, il che vuol dire che Q_1 e Q_2 passano periodicamente insieme per le loro posizioni di equilibrio (stabile). Solo per sistemi con un grado di libertà l'oscillazione libera passa necessariamente per la posizione di equilibrio: quando vi è più di un grado di libertà la configurazione di equilibrio non viene, in generale, più assunta dal sistema durante il suo moto oscillatorio.

Notiamo ancora che, nel caso generale, le traiettorie di P sono curve di LISSAJOUS, o, eccezionalmente, diametri dell'ellisse (6).

3. Una notevole semplificazione formale si ha quando il sistema parte dalla quiete, ossia quando si pone

$$\text{per } t=0 \quad \dot{x}=0 \quad ; \quad \dot{y}=0 \tag{7}$$

In questo caso, in un moto principale, P ripassa periodicamente per 0 e raggiunge, quando si annulla la velocità, la ellisse (6) su cui sta inizialmente, dipartendosene in direzione normale, come appare ovvio esaminando, ad esempio, il moto incipiente di P. Anzi, questo fatto non è legato alla linearità della forza di richiamo, ma unicamente alla presenza di un potenziale. Se il moto non è un moto principale, ma tuttavia valgono le (7), la traiettoria di P parte ortogonalmente dall'ellisse (6) (o, meglio, dalla curva equipotenziale che ora la sostituisce) e, dovendo d'altronde passare per 0, non è più una retta, ma una curva vera e propria.

4. Se le molle non hanno caratteristiche lineari, ROSENBERG [2] ha mostrato che è ancora possibile parlare di moti principali, e ciò, in breve, con le considerazioni seguenti.

In questo caso le equazioni di movimento sono:

$$\ddot{x}=\frac{\partial U}{\partial x} \quad ; \quad \ddot{y}=\frac{\partial U}{\partial y} \quad ; \quad U\leq 0 \tag{8}$$

e, ponendoci nell'ipotesi espressa dalla (7) l'integrale dell'energia si presenta così

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-U=-U_0. \tag{9}$$

[2] l. c.

La linea

$$U = U_0 \tag{10}$$

non è più una ellisse, ma un generico ovale, e da essa si stacca il punto P ortogonalmente, descrivendo una traiettoria estremale dell'equazione:

$$\delta \int \sqrt{U - U_0}\, ds = 0 \tag{11}$$

Il ROSENBERG, seguendo una via quanto mai naturale e spontanea per generalizzare, definisce, a questo punto, i moti principali del sistema imponendo alle corrispondenti traiettorie di P le condizioni seguenti: essere geodetiche della superficie di metrica:

$$ds^2 = (U - U_0)(dx^2 + dy^2) \tag{12}$$

e, inoltre, tagliare ortogonalmente la (10) e, infine, passare per 0, punto-immagine della configurazione di equilibrio. Queste linee, dette sovente linee modali, generalizzano gli assi della ellisse (4), ad essi riducendosi nel caso lineare.

5. È a questo punto che ritengo si possa, con una lieve modifica della definizione del ROSENBERG, estendere la nozione di moti principali non solo a sistemi del tipo considerato sinora, con molle a caratteristiche generalmente non lineari, ma a generici sistemi olonomi con due gradi di libertà e sollecitazione attiva conservativa.

Se q^1 e q^2 sono coordinate lagrangiane tali che $q^1 = q^2 = 0$ sia posizione di equilibrio stabile, detto $U(q^1 q^2)$ il potenziale, risulta:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q^k}\right)_0 = 0 \qquad (k = 1, 2) \tag{13}$$

e porremo inoltre:

$$U(0, 0) = 0. \tag{14}$$

Detta T l'energia cinetica, sarà: [3]

$$2T = a_{hk}\dot{q}^h\dot{q}^k \tag{15}$$

e le equazioni di movimento sono le seguenti:

$$\begin{cases} \ddot{q}^1 + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right\} \dot{q}^1\dot{q}^1 + 2 \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right\} \dot{q}^1\dot{q}^2 + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} \dot{q}^2\dot{q}^2 = U^{/1} \\ \ddot{q}^2 + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \right\} \dot{q}^1\dot{q}^1 + 2 \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} \dot{q}^1\dot{q}^2 + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \right\} \dot{q}^2\dot{q}^2 = U^{/2} \end{cases} \tag{16}$$

mentre fra le condizioni iniziali annoveriamo le seguenti:

$$\text{per } t = 0 \qquad \dot{q}^1 = 0 \quad ; \quad \dot{q}^2 = 0. \tag{17}$$

Ciò premesso, si consideri sulla superficie (q^1q^2) delle configurazioni la curva

$$U = U_0 \tag{18}$$

e, poichè vale l'integrale dell'energia:

$$T - U = U_0 \tag{19}$$

le traiettorie di P hanno gli estremi sulla (18). e possiedono equazioni, nel parametro t, del tipo:

$$q^1 = q^1(t) \quad ; \quad q^2 = q^2(t) \tag{20}$$

e che possono anche ottenersi come estremali d'azione da:

$$\delta \int \sqrt{U - U_0}\, ds = 0 \tag{21}$$

$$ds^2 = a_{hk}dq^h dq^k \qquad (h,\ k = 1,\ 2). \tag{22}$$

[3] Si impiega la notazione tensoriale con tutte le convenzioni che essa comporta.

La direzione di una traiettoria in un suo punto è individuata dai parametri di direzione:

$$\lambda^1 = \frac{dq^1}{ds} \quad ; \quad \lambda^2 = \frac{dq^2}{ds} \tag{23}$$

e dove la traiettoria taglia la (18) si ha per le (20):

$$\frac{\lambda^2}{\lambda^1} = \frac{dq^2}{dq^1} = \left(\frac{\dot{q}^2}{\dot{q}^1}\right)_{t=0} = \left(\frac{\ddot{q}^2}{\ddot{q}^1}\right)_0 = \left(\frac{U^2}{U^1}\right)_0 \tag{24}$$

l'ultimo passaggio essendo conseguenza della (16) e il penultimo essendo giustificato dalla regola dell'Hôpital.

Ma poichè dalla (18) segue:

$$U_{/h} dq^h = 0 \tag{25}$$

si vede che la direzione di una traiettoria e la direzione $(\mu^1 \mu^2)$ della tangente alla (18) soddisfano alla condizione di perpendicolarità:

$$\lambda^h \mu_h = 0. \tag{26}$$

Si può dunque concludere che, per un generico sistema con due gradi di libertà (che differisce da quello non lineare del n. 4 perchè ora la metrica è generica, mentre colà era isoterma) possono definirsi i moti principali come corrispondenti a curve della superficie delle configurazioni (di metrica (22)) estremali della (21), ortogonali alla (18) e passanti per 0, punto-immagine dell'equilibrio. Questa conclusione vale qualunque sia il numero dei gradi di libertà.

6. Si può mostrare che è possibile avvicinarsi di più al caso del § 4, e parlare di geodetiche anzichè di estremali generiche Ma questo è possibile solo nel caso di due gradi di libertà.

Osserviamo infatti che la metrica (22) può sempre porsi in forma isoterma, usando opportune coordinate x, y, talchè la (22) assume l'aspetto seguente:

$$ds^2 = \Lambda(x, y)(dx^2 + dy^2). \tag{27}$$

Potremo allora definire moti principali quelli le cui traiettorie sono:

a) estremali di:

$$\delta \int \sqrt{\Lambda(U - U_0)}\, dS = 0 \tag{28}$$

dove dS ha forma euclidea;

b) normali alla curva (18) del piano x, y;

c) passanti per 0.

La condizione b) segue dal fatto che si ha:

$$\frac{dx}{dS} = \sqrt{\Lambda}\,\frac{dx}{dS} \quad ; \quad \frac{dy}{dS} = \sqrt{\Lambda}\,\frac{dy}{dS}$$

e pertanto la:

$$\frac{dx}{ds}\,\mu_x + \frac{dy}{ds}\,\mu_y = 0$$

trae seco:

$$\frac{dx}{dS}\,\mu_x + \frac{dy}{dS}\,\mu_y = 0.$$

Non è fuori luogo notare che l'idea del ROSENBERG, di definire, nei casi da lui studiati, i moti principali come moti caratterizzati, fra l'altro, dall'essere estremali del problema variazionale sopra riportato, offre il vantaggio di assicurare implicitamente l'esistenza di tali moti, in quanto il problema variazionale con un estremo variabile, per il quale si richiede come condizione all'estremo una condizione di trasversalità, è un ben noto problema trattato da COURANT, il quale ha mostrato che esistono sempre due soluzioni, corrispondenti alle due geodetiche passanti per 0 e aventi, fra gli estremi giacenti sul contorno, la più grande e la più piccola lunghezza. Di qui il nome di problemi massimo-minimo che viene talvolte usato.

Si devono ancora fare due osservazioni. La prima, che si può anche ragionare sulla superficie Σ di metrica:

$$d\sigma^2 = \Lambda(U - U_0)(dx^2 + dy^2)$$

e definire moti psincipali quelli le cui traiettorie sono:

a') geodetiche di Σ;

b') normali alla curva $U = U_0$ di Σ, su cui la metrica si annulla;

c') passanti per 0.

La condizione b') segue dal fatto che:

$$\frac{\partial}{\partial x}[\Lambda(U - U_0)] = \frac{\partial \Lambda}{\partial x}(U - U_0) + \Lambda \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[\Lambda(U - U_0)] = \frac{\partial \Lambda}{\partial y}(U - U_0) + \Lambda \frac{\partial U}{\partial y}$$

cosicchè nella curva $U = U_0$ le derivate di $(U - U_0)$ si annullano insieme a quelle di U, e si può così estendere l'osservazione che portò alla (26).

Si vede dunque che è possibile estendere la nozione di moti principali a sistemi affatto generici, operando come nel caso di un doppio oscillatore con molle non lineari, (cioè come fa il ROSENBERG) ma sostituendo alla funzione $U - U_0$ la funzione $\Lambda(U - U_0)$. ciò però, dopo avere scelto coordinate isoterme.

E qui interviene la seconda osservazione, e precisamente che questo modo di procedere è possibile per $n = 2$, ma non generalmente per $n > 2$, cosicchè la presente estensione dei risultati del ROSENBERG è generalmente possibile solo per due gradi di libertà.