Bollettino
Unione Matematica Italiana

Maria Teresa Vacca

Equilibrio magnetostatico di un anello di plasma entro un solenoide toroidale.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.3, p. 197–210.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_3_197_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1963.

Equilibrio magnetostatico di un anello di plasma entro un solenoide toroidale (*).

Nota di MARIA TERESA VACCA (a Torino) (**)

Sunto. - *Si esprimono mediante una stessa funzione le componenti del campo magnetico e la pressione in un anello di plasma in equilibrio magnetostatico entro un solenoide toroidale. Si esamina poi e si risolve un caso particolare in cui la sezione dell'anello torico del plasma risulta circolare.*

1. In un recente lavoro G. M. FERRERO (1) ha studiato il comportamento di un plasma in condizioni di equilibrio magnetostatico, contenuto in un tubo toroidale, ed ha risolto un caso particolare in cui è ellittica la sezione del toro.

In questa nota considero un anello di plasma immerso nel campo magnetico generato da un solenoide toroidale, costituito da un filo percorso da corrente di intensità i e avvolto uniformemente con n spire su di un toro, e ne studio l'equilibrio magnetostatico nell'ipotesi della simmetria assiale.

Dopo aver ricondotto la determinazione delle componenti del campo magnetico indotto e della pressione a quella di una funzione V, esamino un caso particolare cercando in coördinate toroidali una soluzione V rappresentabile in una serie di potenze, in cui si possono poi trascurare i termini di ordine superiore al secondo, essendo il raggio del toro molto grande rispetto al raggio della della sua sezione meridiana.

Imponendo la continuità della pressione totale attraverso la superficie dell'anello di plasma ottengo l'equazione del contorno della sezione di tale anello e quindi determino le costanti del problema in modo che tale sezione sia circolare.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca n° 3 del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R. (1962-63).

(**) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 29 aprile 1963.

(1) G. M. FERRERO, *Equilibrio di un plasma contenuto in un toro a sezione ellittica* («Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino», vol. 96, 1961-62).

2. Consideriamo le equazioni che reggono l'equilibrio del plasma in assenza di forze di natura non elettromagnetica:

$$\mathrm{div}\, \overrightarrow{H} = 0 \tag{1}$$

$$\mathrm{grad}\, p - \mu\, \mathrm{rot}\, \overrightarrow{H} \wedge \overrightarrow{H} = 0, \tag{2}$$

ove $\overrightarrow{H}$ è il campo magnetico, p la pressione del plasma, entrambi supposti indipendenti dal tempo, e μ la permeabilità magnetica costante.

Con riferimento ad un sistema di coordinate cilindriche r, φ, z di versori $\overrightarrow{a_r}$, $\overrightarrow{a_\varphi}$, $\overrightarrow{a_z}$ indichiamo con H_r, H_φ, H_z le componenti del campo magnetico. Nell'ipotesi della simmetria assiale tali componenti (ed anche la pressione) risultano indipendenti dall'anomalia φ per cui l'equazione (1) diventa

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_r) + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0,$$

dalla quale si deduce l'esistenza di una funzione $V(r, z)$ tale che

$$H_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial z}, \qquad H_z = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}. \tag{3}$$

Abbiamo perciò

$$\overrightarrow{H} = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial z}\, \mathrm{grad}\, r + H_\varphi\, r\, \mathrm{grad}\, \varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\, \mathrm{grad}\, z \tag{4}$$

ed indicando con ∇_2 l'operatore differenziale del secondo ordine

$$\nabla_2 = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{5}$$

otteniamo

$$\mathrm{rot}\, H = -\frac{1}{r}\nabla_2 V\, \overrightarrow{a_\varphi} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)\overrightarrow{a_z} - \frac{\partial}{\partial z}(rH_\varphi)\overrightarrow{a_r}\right].$$

Si ricava allora

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{H}\wedge\overrightarrow{H}=-\left[\frac{\nabla_2 V}{r^2}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{H_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)\right]\overrightarrow{a_r}+$$

$$+\left[\frac{1}{r}\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)\frac{\partial V}{\partial z}\right]\overrightarrow{a_\varphi}-\left[\frac{\nabla_2 V}{r^2}\frac{\partial V}{\partial z}+H_\varphi\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\right]\overrightarrow{a_z}$$

e quindi dalla (2) si deducono le seguenti equazioni scalari di equilibrio

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial r}+\mu\left[\dfrac{\nabla_2 V}{r^2}\dfrac{\partial V}{\partial r}+\dfrac{H_\varphi}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)\right]=0 \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial z}(rH_\varphi)\dfrac{\partial V}{\partial r}-\dfrac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)\dfrac{\partial V}{\partial z}=0 \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial z}+\mu\left[\dfrac{\nabla_2 V}{r^2}\dfrac{\partial V}{\partial z}+H_\varphi\dfrac{\partial H_\varphi}{\partial z}\right]=0. \end{cases}$$

La seconda delle (6) fornisce

$$(7)\qquad rH_\varphi=F(V),$$

con F funzione arbitraria di V, mentre la condizione di integrabilità delle altre due equazioni risulta

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\nabla_2 V}{r^2}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{2r^2}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)^2\right]=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\nabla_2 V}{r^2}\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{1}{2}\frac{\partial H^2_\varphi}{\partial z}\right],$$

cioè per la (7)

$$(8)\qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\nabla_2 V}{r^2}\right)\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\nabla_2 V}{r^2}\right)\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{1}{2r^2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial z\partial r}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\left(\frac{F^2}{r^2}\right)=0.$$

Poichè si ha

$$\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\left(\frac{F^2}{r^2}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial r\partial z}-\frac{2}{r^3}\frac{dF^2}{dV}\frac{\partial V}{\partial z}$$

la (8) si riduce alla forma seguente

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\nabla_2 V}{r^2}\right)\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\nabla_2 V}{r^2}\right)\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{1}{r^3}\frac{dF^2}{dV}\frac{\partial V}{\partial z}=0,$$

ossia

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial\nabla_2 V}{\partial r}\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial\nabla_2 V}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial r}\right]-\frac{2}{r^3}\left(\nabla_2 V+\frac{1}{2}\frac{dF^2}{dV}\right)\frac{\partial V}{\partial z}=0. \tag{8'}$$

L'equazione (8') è soddisfatta se si pone

$$\nabla_2 V+\frac{1}{2}\frac{dF^2}{dV}=r^2 G'(V), \qquad \left(G'(V)=\frac{dG}{dV}\right), \tag{9}$$

con G' funzione arbitraria di V.

Dalla prima e dalla terza delle (6), tenuto conto della (7), seguono le equazioni

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left(\nabla_2 V+\frac{1}{2}\frac{dF^2}{dV}\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial V}{\partial r}=0\\&\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\nabla_2 V+\frac{1}{2}\frac{dF^2}{dV}\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial V}{\partial z}=0\end{aligned}\right.$$

che per la (9) diventano

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial p}{\partial r}+\mu G'(V)\frac{\partial V}{\partial r}=0\\&\frac{\partial p}{\partial z}+\mu G'(V)\frac{\partial V}{\partial z}=0.\end{aligned}\right.$$

Si ricava allora

$$d[p+\mu G(V)]=0$$

cioè

$$p+\mu G(V)=\text{cost.} \tag{10}$$

Dunque anche la pressione risulta fnnzione di V.

Il problema è così ricondotto alla determinazione della sola funzione V, dopo di che le formule (3), (7), (10) forniranno rispettivamente le componenti del campo magnetico e la pressione.

3. Consideriamo il caso in cui

$$F(V) = kV, \qquad G = \frac{1}{2} h_0 V^2 + h_1 V, \qquad (k,\ h_0,\ h_1 \text{ costanti}). \tag{11}$$

Allora la (7) diventa

$$rH_\varphi = kV \tag{7'}$$

ed essendo

$$G' = h_0 V + h_1$$

la (9) risulta

$$\nabla_2 V + k^2 V = r^2 (h_0 V + h_1)$$

cioè

$$\nabla_2 V + (k^2 - h_0 r^2) V = h_1 r^2. \tag{9'}$$

Osservando che l'operatore differenziale ∇_2, definito dalla (5), si può esprimere mediante l'operatore di LAPLACE

$$\triangle_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

nella forma

$$\nabla_2 = \triangle_2 - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

si può sostituire la (9') con l'equazione seguente

$$\triangle_2 V - \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + (k^2 - h_0 r^2) V = h_1 r^2. \tag{12}$$

Dalla (10), tenuto conto della seconda delle (11), si deduce infine

$$(10') \qquad p + \mu \left[\frac{1}{2} h_0 V^2 + h_1 V\right] = \text{cost}.$$

Poichè supponiamo che il plasma sia contenuto in un solenoide toroidale ci riferiamo a coordinate toroidali ρ, ϑ definite dalle relazioni seguenti

$$r = R + \rho \cos \vartheta$$

$$z = \rho \operatorname{sen} \vartheta \qquad \text{con} \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho < R,$$

essendo R la distanza dall'asse z del centro della sezione meridiana del toro.

Se poniamo

$$\frac{\rho}{R} = \xi, \qquad \eta = \vartheta$$

otteniamo

$$(13) \qquad \begin{cases} r = R(1 + \xi \cos \eta) \\ z = R\xi \operatorname{sen} \eta. \end{cases}$$

Poichè la funzione V è indipendente da φ, in coordinate toroidali abbiamo [2]

$$\Delta_2 V = \frac{1}{R^2 \xi (1 + \xi \cos \eta)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\xi (1 + \xi \cos \eta) \frac{\partial V}{\partial \xi}\right] + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta}\left[(1 + \xi \cos \eta) \frac{\partial V}{\partial \eta}\right] \right\}$$

e

$$\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{R^2 \xi (1 + \xi \cos \eta)} \left[\xi \cos \eta \cdot \frac{\partial V}{\partial \xi} - \operatorname{sen} \eta \cdot \frac{\partial V}{\partial \eta}\right].$$

[2] Cfr. AGOSTINELLI, *Istituzioni di Fisica Matematica*, vol. I, pag. 67, (Zanichelli, Bologna, 1962).

L'equazione (12) diventa perciò

$$\frac{1}{\xi(1+\xi\cos\eta)}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\xi(1+\xi\cos\eta)\frac{\partial V}{\partial\xi}\right]+\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(1+\xi\cos\eta)\frac{\partial V}{\partial\eta}\right]\right\}-$$

$$-\frac{2}{\xi(1+\xi\cos\eta)}\left[\xi\cos\eta\cdot\frac{\partial V}{\partial\xi}-\operatorname{sen}\eta\cdot\frac{\partial V}{\partial\eta}\right]+$$

$$+[k^2-h_0R^2(1+\xi\cos\eta)^2]R^2V=h_1R^4(1+\xi\cos\eta)^2,$$

ossia

$$\xi(1+\xi\cos\eta)\frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2}+\frac{1+\xi\cos\eta}{\xi}\frac{\partial^2 V}{\partial\eta^2}+\frac{\partial V}{\partial\xi}+\operatorname{sen}\eta\cdot\frac{\partial V}{\partial\eta}+\tag{14}$$

$$+R^2\xi(1+\xi\cos\eta)[k^2-h_0R^2(1+\xi\cos\eta)^2]V=h_1R^4\xi(1+\xi\cos\eta)^3.$$

Cerchiamo una soluzione dell'equazione (14) rappresentabile mediante una serie di potenze di ξ della forma

$$V=\sum_{m=0}\xi^m V_m(\eta)$$

ove $V_m(\eta)$ sono funzioni incognite di η.

Sostituendo nella (14) si ottiene

$$(1+\xi\cos\eta)\sum_{m=0}\xi^m V_m''+\sum_{m=0}\xi^{m+1}\operatorname{sen}\eta\cdot V_m'+$$

$$+(1+\xi\cos\eta)\sum_{m=0}m(m-1)\xi^m V_m+\sum_{m=0}m\xi^m V_m+$$

$$+R^2\xi^2(1+\xi\cos\eta)[k^2-h_0R^2(1+\xi\cos\eta)^2]\sum_{m=0}\xi^m V_m=$$

$$=h_1R^4\xi^2(1+\xi\cos\eta)^3$$

e semplificando risulta

$$\sum_{m=0}(\xi^m+\xi^{m+1}\cos\eta)V_m''+\sum_{m=0}\xi^{m+1}\operatorname{sen}\eta\cdot V_m'+$$

$$+\sum_{m=0}[m^2\xi^m+m(m-1)\xi^{m+1}\cos\eta]V_m+$$

$$+R^2\xi^2(1+\xi\cos\eta)[k^2-h_0R^2(1+\xi\cos\eta)^2]\sum_{m=0}\xi^m V_m=h_1R^4\xi^2(1+\xi\cos\eta)^3.$$

Eguagliando i coefficienti di ξ^0, ξ, ξ^2, ξ^3 ... nel primo e secondo membro dell'equazione precedente si deducono rispettivamente le equazioni

$$V_0'' = 0, \qquad \text{soddisfatta da } V_0 = \text{cost.},$$

$$V_1'' + V_1 = 0,$$

$$V_2'' + 4V_2 + \cos\eta \cdot V_1'' + \operatorname{sen}\eta \cdot V_1' + R^2(k^2 - h_0R^2)V_0 - h_1R^4 = 0,$$

$$V_3'' + 9V_3 + \cos\eta \cdot V_2'' + \operatorname{sen}\eta \cdot V_2' + 2\cos\eta \cdot V_2 + R^2[(k^2 - h_0R^2)$$
$$(\cos\eta \cdot V_0 + V_1) - 2h_0V_0R^2\cos\eta] - 3h_1R^4\cos\eta = 0$$

. . . .

che integrate forniscono le soluzioni:

$$V_1 = c_1\cos\eta + c_2\operatorname{sen}\eta$$

$$(15) \qquad V_2 = c_3\cos 2\eta + c_4\operatorname{sen}2\eta + \frac{1}{4}[c_1 + h_1R^4 - R^2(k^2 - h_0R^2)V_0]$$

$$V_3 = c_5\cos 3\eta + c_6\operatorname{sen}3\eta + \frac{1}{8}\cos\eta\left\{2c_3 - c_1\left[R^2(k^2 - h_0R^2) + \frac{1}{2}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{5}{2}R^4(h_0V_0 + h_1) - \frac{1}{2}R^2k^2V_0\right\} + \frac{1}{8}\operatorname{sen}\eta\left\{2c_4 - c_2R^2(k^2 - h_0R^2)\right\},$$

. . . .

e quindi

$$(16) \qquad V = V_0 + V_1\xi + V_2\xi^2 + \dots$$

in cui si possono trascurare i termini di ordine superiore al secondo in ξ poichè il raggio R del toro è molto grande in confronto al raggio della sua sezione meridiana.

Essendo

$$V^2 = V_0^2 + 2V_0V_1\xi + (V_1^2 + 2V_0V_2)\xi^2 + \dots$$

dalla (10') si ricava per la pressione l'equazione

$$p + \mu \left\{ \frac{1}{2} h_0 [V_0^2 + 2 V_0 V_1 \xi + (V_1^2 + 2 V_0 V_2) \xi^2] + \right.$$

$$\left. + h_1 (V_0 + V_1 \xi + V_2 \xi^2) \right\} = \text{cost.}$$

Sia p_0 il valore di p per $\xi = 0$, allora

$$p_0 + \mu \left\{ \frac{1}{2} h_0 V_0^2 + h_1 V_0 \right\} = \text{cost.}$$

e l'equazione

$$p - p_0 + \mu \left\{ \frac{1}{2} h_0 [2 V_0 V_1 \xi + (V_1^2 + 2 V_0 V_2) \xi^2] + h_1 (V_1 \xi + V_2 \xi^2) \right\} = 0 \tag{17}$$

definisce la pressione nell'interno dell'anello torico del plasma. La pressione totale all'interno vale

$$p + \frac{1}{2} \mu H^2 = p + \frac{1}{2} \mu [H_r^2 + H_z^2 + H_\varphi^2]$$

ossia, ricordando le (3) e la (7'),

$$p + \frac{1}{2} \mu H^2 = p + \frac{1}{2} \mu \left[\frac{1}{r^2} (\text{grad } V)^2 + \frac{k^2}{r^2} V^2 \right].$$

Sulla superficie dell'anello di plasma la pressione totale è la pressione magnetica dovuta al solenoide [3]

$$\frac{1}{2} \mu_0 H_s^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{n^2 i^2}{4 \pi^2 r^2} .$$

Affinchè la pressione totale sia continua attraverso tale superficie si dovrà avere nei punti di questa

$$\mu_0 \frac{n^2 i^2}{8 \pi^2 r^2} = p + \frac{\mu}{2} \left[\frac{1}{r^2} (\text{grad } V)^2 + \frac{k^2}{r^2} V^2 \right],$$

[3] D. Graffi, *Teoria matematica dell'elettromagnetismo*, pag. 297, (Casa Editrice Pàtron, Bologna, 1949).

perciò l'equazione

$$\frac{\mu_0 n^2 i^2}{8\pi^2} = pr^2 + \frac{\mu}{2}[(\text{grad } V)^2 + k^2 V^2] \tag{18}$$

rappresenta il contorno dell'anello di plasma.

Per le (13) risulta

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{\partial V}{\partial r} R \cos\eta + \frac{\partial V}{\partial z} R \operatorname{sen}\eta$$

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} = -\frac{\partial V}{\partial r} R\xi \operatorname{sen}\eta + \frac{\partial V}{\partial z} R\xi \cos\eta$$

cioè

$$\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{\partial V}{\partial r}\cos\eta + \frac{\partial V}{\partial z}\operatorname{sen}\eta$$

$$\frac{1}{R\xi}\frac{\partial V}{\partial \eta} = -\frac{\partial V}{\partial r}\operatorname{sen}\eta + \frac{\partial V}{\partial z}\cos\eta$$

da cui si deduce

$$(\text{grad } V)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{R^2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{1}{\xi^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)^2\right].$$

Inoltre dalla (16) abbiamo

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = V_1 + 2V_2\xi + 3V_3\xi^2 + \ldots$$

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} = V_1'\xi + V_2'\xi^2 + V_3'\xi^3 + \ldots$$

quindi

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)^2 = V_1^2 + 4V_1V_2\xi + 2(2V_2^2 + 3V_1V_3)\xi^2 + \ldots$$

$$\frac{1}{\xi^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)^2 = V_1'^2 + 2V_1'V_2'\xi + (V_2'^2 + 2V_1'V_3')\xi^2 + \ldots$$

ed infine

$$(19) \qquad (\text{grad } V)^2 =$$

$$= \frac{1}{R^2} \{ V_1^2 + V_1'^2 + 2(2V_1V_2 + V_1'V_2')\xi + [2(2V_2^2 + 3V_1V_3) + (V_2'^2 + 2V_1'V_3')]\xi^2 + \ldots \}.$$

Dalla (16) si è già ricavato

$$(20) \qquad V^2 = V_0^2 + 2V_0V_1\xi + (V_1^2 + 2V_0V_2)\xi^2 + \ldots$$

mentre la (17) fornisce

$$p = p_0 - \mu \left\{ V_1(h_0V_0 + h_1)\xi + \left[\frac{1}{2}h_0(V_1^2 + 2V_0V_2) + h_1V_2\right]\xi^2 \right\}$$

e per la prima delle (13) si ha

$$pr^2 = pR^2(1 + 2\xi\cos\eta + \xi^2\cos^2\eta),$$

ossia

$$(21) \quad pr^2 = R^2 \left\{ p_0 - \mu V_1(h_0V_0 + h_1)\xi - \mu\left[\frac{h_0}{2}(V_1^2 + 2V_0V_2) + h_1V_2\right]\xi^2 + 2p_0\xi\cos\eta - 2\mu V_1(h_0V_0 + h_1)\xi^2\cos\eta + p_0\xi^2\cos^2\eta \right\}.$$

Sostituendo nell'equazione (18) le espressioni date dalle (19), (20) e (21) si ottiene

$$\frac{\mu_0 n^2 i^2}{8\pi^2} = R^2 \left\{ p_0 - \mu V_1(h_0V_0 + h_1)\xi - \mu\left[\frac{h_0}{2}(V_1^2 + 2V_0V_2) + h_1V_2\right]\xi^2 + 2p_0\xi\cos\eta - 2\mu V_1(h_0V_0 + h_1)\xi^2\cos\eta + p_0\xi^2\cos^2\eta \right\} + \frac{\mu}{2R^2}\left\{ V_1^2 + V_1'^2 + 2(2V_1V_2 + V_1'V_2')\xi + [2(2V_2^2 + 3V_1V_3) + V_2'^2 + 2V_1'V_3']\xi^2 \right\} + \frac{k^2\mu}{2}[V_0^2 + 2V_0V_1\xi + (V_1^2 + 2V_0V_2)\xi^2],$$

ossia

$$R^2 p_0 - \frac{\mu_0 n^2 i^2}{8\pi^2} + \frac{\mu}{2R^2}(V_1^2 + V_1'^2 + k^2R^2V_0^2) + \frac{\mu}{2R^2}\xi\Big\{ - 2R^4 V_1(h_0 V_0 + h_1) +$$

$$+ \frac{4p_0}{\mu} R^4 \cos\eta + 4V_1V_2 + 2V_1'V_2' + 2k^2R^2V_0V_1\Big\} + \frac{\mu}{2R^2}\xi^2\Big\{ - R^4[h_0V_1^2 +$$

$$+ 2V_2(h_0V_0 + h_1) + 4V_1(h_0V_0 + h_1)\cos\eta] + \frac{2p_0}{\mu}R^4\cos^2\eta + 4V_2^2 + V_2'^2 +$$

$$+ 6V_1V_3 + 2V_1'V_3' + k^2R^2(V_1^2 + 2V_0V_2)\Big\} = 0.$$

Ponendo

$$V_0 = -\frac{h_1}{h_0}$$

e tenendo conto delle formule (15) si ricava

$$R^2p_0 - \frac{\mu_0 n^2 i^2}{8\pi^2} + \frac{\mu}{2R^2}(c_1^2 + c_2^2 + k^2R^2V_0^2) + \frac{\mu}{2R^2}\xi\Big\{\frac{4p_0}{\mu}R^4\cos\eta +$$

$$+ 4(c_1c_3 + c_2c_4)\cos\eta + 4(c_1c_4 - c_2c_3)\operatorname{sen}\eta + (c_1 + R^2k^2V_0)(c_1\cos\eta +$$

$$+ c_2\operatorname{sen}\eta)\Big\} + \frac{\mu}{2R^2}\xi^2\Big\{\frac{2p_0}{\mu}R^4\cos^2\eta + \frac{1}{2}R^2(k^2 - h_0R^2)(c_1^2\cos^2\eta +$$

$$+ c_2^2\operatorname{sen}^2\eta + 2c_1c_2\operatorname{sen}\eta\cdot\cos\eta) + 2c_1(c_3\cos 2\eta + c_4\operatorname{sen}2\eta) +$$

$$+ 6(c_1c_5 + c_2c_6)\cos 2\eta + 6(c_1c_6 - c_2c_5)\operatorname{sen}2\eta + [c_1c_3 - \frac{c_1}{4}(c_1 +$$

$$+ R^2k^2V_0)]\cos^2\eta + c_2c_4\operatorname{sen}^2\eta + \Big[c_1c_4 + c_2c_3 - \frac{c_2}{4}(c_1 +$$

$$+ R^2k^2V_0)\Big]\operatorname{sen}\eta\cdot\cos\eta + 4(c_3^2 + c_4^2) + \frac{c_1c_3 + c_2c_4}{2} - R^2(k^2 -$$

$$- h_0R^2)\frac{c_1^2 + c_2^2}{4} + \frac{1}{8}(c_1 + R^2k^2V_0)(c_1 - 2R^2k^2V_0)\Big\} = 0.$$

Ora tale equazione, riferita ad un sistema di assi cartesiani ortogonali X, Y così definiti

$$X = \xi \cos \eta, \qquad X = \xi \operatorname{sen} \eta,$$

rappresenta una conica. Ponendo

$$c_2 = 0, \qquad c_3 = 0, \qquad c_4 = 0, \qquad c_6 = 0$$

l'equazione assume la forma

$$AX^2 + BY^2 + CX = D \tag{22}$$

con

$$A = \frac{\mu}{2R^2}\left\{\frac{2p_0}{\mu} R^4 + \frac{c_1^2}{2} R^2(k^2 - h_0R^2) - \frac{c_1}{4}(c_1 + R^2k^2V_0) + 6c_1c_5 + \right.$$

$$\left. + \left[-\frac{c_1^2}{4} R^2(k^2 - h_0R^2) + \frac{1}{8}(c_1 + R^2k^2V_0)(c_1 - 2R^2k^2V_0)\right]\right\},$$

$$B = \frac{\mu}{2R^2}\left\{-6c_1c_5 + \left[-\frac{c_1^2}{4} R^2(k^2 - h_0R^2) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{8}(c_1 + R^2k^2V_0)(c_1 - 2R^2k^2V_0)\right]\right\},$$

$$C = \frac{\mu}{2R^2}\left[c_1^2 + c_1R^2k^2V_0 + \frac{4p_0}{\mu} R^4\right],$$

$$D = \frac{\mu_0 n^2 i^2}{8\pi^2} - \frac{\mu}{2R^2}(c_1^2 + k^2R^2V_0^2) - R^2p_0.$$

Affinchè l'equazione (22) rappresenti una circonferenza basta imporre

$$A = B \quad \text{e} \quad \frac{D}{A} + \frac{C^2}{4A^2} > 0.$$

La prima condizione è soddisfatta se si assume

$$c_5 = \frac{1}{12}\left\{\frac{c_1 + R^2k^2V_0}{4} - \frac{c_1}{2}R^2(k^2 - h_0R^2) - \frac{2p_0R^4}{c_1\mu}\right\}$$

per cui si ha

$$A = B = \frac{\mu}{2R^2}\left\{\frac{p_0}{\mu}R^4 - \frac{R^2k^2V_0}{4}(c_1 + R^2k^2V_0)\right\}.$$

La seconda condizione, cioè $4AD + C^2 > 0$, diventa

$$\frac{p_0\mu_0n^2i^2R^2}{4\pi^2} + \mu p_0c_1^2 + 2p_0^2R^4 + \frac{\mu^2}{4R^4}c_1^2(c_1 + R^2k^2V_0)^2 +$$

$$+ \frac{\mu p_0}{2}V_0^2R^4k^4 - \mu p_0V_0^2R^2k^2 + \frac{5}{2}\mu p_0R^2k^2V_0c_1 +$$

$$+ \frac{\mu^2}{4R^2}k^2V_0(c_1 + R^2k^2V_0)(c_1^2 + R^2k^2V_0^2) - \frac{\mu\mu_0n^2i^2k^2V_0}{16\pi^2}(c_1 + R^2k^2V_0) > 0.$$

Nel caso di $k = 0$ (campo magnetico trasversale nullo) risulta

$$4AD + C^2 = \frac{p_0\mu_0n^2i^2R^2}{4\pi^2} + \mu p_0c_1^2 + 2p_0^2R^4 + \frac{\mu^2}{4R^4}c_1^4 > 0$$

e quindi la seconda condizione è sempre soddisfatta.