Dionigi Galletto

Intorno ad alcuni teoremi sulle matrici quadrate.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.2, p. 94–100.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_2_94_0>

Intorno ad alcuni teoremi sulle matrici quadrate

Nota di DIONIGI GALLETTO (a Padova) (*) (**)

Sunto. - *Come dalle prime righe.*

In questa nota osservo come, dall'invarianza delle leggi di composizione fra tensori e dalla legge di trasformazione di questi di fronte a cambiamenti dei sistemi di riferimento, discenda, quale necessaria conseguenza, la validità di due teoremi sulle matrici quadrate non singolari. Dalla combinazione di tali teoremi segue immediatamente la regola di LAPLACE.

1. Sia V^n uno spazio vettoriale n-dimensionale (1) costruito sopra il corpo dei numeri complessi, $(\boldsymbol{e}_\alpha)$, $(\boldsymbol{e}_{\alpha'})$ due sue basi qualsiansi, $e^\alpha_{\alpha'}$ la α-esima componente del vettore $\boldsymbol{e}_{\alpha'}$ rispetto alla base $(\boldsymbol{e}_\alpha)$, $e^{\alpha'}_\alpha$ la α'-esima componente del vettore $\boldsymbol{e}_\alpha$ rispetto alla base $(\boldsymbol{e}_{\alpha'})$, Δ il determinante della matrice $\| e^\alpha_{\alpha'} \|$ (α indice delle righe, α' indice delle colonne). La matrice $\| e^{\alpha'}_\alpha \|$ (α' indice delle righe, α indice delle colonne) è, come subito si riconosce, l'inversa (trasposta della reciproca) della matrice $\| e^\alpha_{\alpha'} \|$.

Qualora in V^n si passi dalla base $(\boldsymbol{e}_\alpha)$ alla base $(\boldsymbol{e}_{\alpha'})$, un tensore $\boldsymbol{T}$ di peso s (2) e di ordine r definito su V^n ha le componenti che si trasformano secondo le (3)

$$T^{\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_r} = \Delta^s e^{\alpha'_1}_{\alpha_1} e^{\alpha'_2}_{\alpha_2} \ldots e^{\alpha'_r}_{\alpha_r} T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r}, \tag{1}$$

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 28 febbraio 1963.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca n. 7 del Comitato per la Matematica del C. N. R. per l'anno acc. 1962-63.

(1) Per le nozioni di spazio vettoriale, di base, ecc., si veda, ad es., [4], nn. 1, 5, 9.

(2) Ai tensori di peso $s \neq 0$ si dà abitualmente la denominazione di *densità tensoriali.*

(3) Nelle (1), (2), ecc. è sottinteso il simbolo di sommatoria rispetto agli indici ripetuti in alto e in basso.

nell'ipotesi che esso sia r volte contravariante; secondo le

(2) $$T_{\alpha'_1\alpha'_2\dots\alpha'_r} = \Delta^s e^{\alpha_1}_{\alpha'_1} e^{\alpha_2}_{\alpha'_2} \dots e^{\alpha_r}_{\alpha'_r} T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r},$$

nell'ipotesi che esso sia r volte covariante.

2. Supposto $1 \leq r \leq n$, T emisimmetrico (per $r > 1$) e introdotto il tensore [4] di ordine $2r$ e peso 0 avente per componenti, in ogni riferimento, le $\delta^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r}_{\beta_1\beta_2\dots\beta_r}$ definite dalle seguenti condizioni:

1) $\delta^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r}_{\beta_1\beta_2\dots\beta_r} = 0$ se le due disposizioni $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ e $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ contengono delle ripetizioni oppure non sono costituite dagli stessi numeri;

2) $\delta^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r}_{\beta_1\beta_2\dots\beta_r} = \pm 1$ nel caso restante, valendo il segno superiore o inferiore a seconda che la disposizione $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ è di classe pari o dispari rispetto alla disposizione $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$;

le componenti di T sono legate alle *essenziali*, ossia a quelle per cui è $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_r$, dalle [5]

$$T^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r} = \delta^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r}_{i_1 i_2\dots i_r} T^{i_1 i_2\dots i_r},$$

o dalle

$$T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r} = \delta^{i_1 i_2\dots i_r}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r} T_{i_1 i_2\dots i_r},$$

a seconda che T è contravariante o covariante. Pertanto, ricordando le (1), (2), si ottiene che le sue componenti essenziali, qualora in

[4] In base alla definizione di $\delta^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r}_{\beta_1\beta_2\dots\beta_r}$ risulta, in ogni riferimento e nell'ipotesi in cui T sia, ad es., contravariante,

$$T^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r} = \frac{1}{r!}\delta^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r}_{\beta_1\beta_2\dots\beta_r} T^{\beta_1\beta_2\dots\beta_r}.$$

Da queste, ricordando un noto criterio di tensorialità, segue che le $\delta^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r}_{\beta_1\beta_2\dots\beta_r}$ sono le componenti di un tensore r volte contravariante e r volte covariante.

[5] Gli indici latini stanno ad indicare che è da intendersi $i_1 < i_2 < \dots < i_r$.

V^n si passi dalla base $(\boldsymbol{e}_\alpha)$ alla base $(\boldsymbol{e}_{\alpha'})$, si trasformano secondo le

$$T^{i'_1 i'_2 \dots i'_r} = \Delta^s \delta^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}_{i_1 i_2 \dots i_r} e^{i'_1}_{\alpha_1} e^{i'_2}_{\alpha_2} \dots e^{i'_r}_{\alpha_r} T^{i_1 i_2 \dots i_r},$$

o secondo le

$$T_{i'_1 i'_2 \dots i'_r} = \Delta^s \delta^{i_1 i_2 \dots i_r}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} e^{\alpha_1}_{i'_1} e^{\alpha_2}_{i'_2} \dots e^{\alpha_r}_{i'_r} T_{i_1 i_2 \dots i_r},$$

relazioni che, fatte le posizioni

$$e^{i'_1 i'_2 \dots i'_r}_{i_1 i_2 \dots i_r} = \begin{vmatrix} e^{i'_1}_{i_1} & e^{i'_1}_{i_2} & \dots & e^{i'_1}_{i_r} \\ e^{i'_2}_{i_1} & e^{i'_2}_{i_2} & \dots & e^{i'_2}_{i_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{i'_r}_{i_1} & e^{i'_r}_{i_2} & \dots & e^{i'_r}_{i_r} \end{vmatrix},$$

$$e^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i'_1 i'_2 \dots i'_r} = \begin{vmatrix} e^{i_1}_{i'_1} & e^{i_1}_{i'_2} & \dots & e^{i_1}_{i'_r} \\ e^{i_2}_{i'_1} & e^{i_2}_{i'_2} & \dots & e^{i_2}_{i'_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{i_r}_{i'_1} & e^{i_r}_{i'_2} & \dots & e^{i_r}_{i'_r} \end{vmatrix},$$

si possono anche scrivere

$$T^{i'_1 i'_2 \dots i'_r} = \Delta^s e^{i'_1 i'_2 \dots i'_r}_{i_1 i_2 \dots i_r} T^{i_1 i_2 \dots i_r}, \tag{3}$$

$$T_{i'_1 i'_2 \dots i'_r} = \Delta^s e^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i'_1 i'_2 \dots i'_r} T_{i_1 i_2 \dots i_r}, \tag{4}$$

e nelle quali è sottinteso che si deve sommare rispetto agli indici $i_1, i_2, \dots, i_r$, tenendo presente che deve essere sempre $i_1 < i_2 < \dots < i_r$.

3. I due enti le cui componenti, rispetto ad ogni riferimento, sono definite dalle

$$\varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = \delta^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}_{1\ 2 \dots n}, \tag{5}$$

$$\varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = \delta^{1\ 2 \dots n}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \tag{6}$$

sono, come immediatamente si verifica, due tensori di ordine n, l'uno contravariante e l'altro covariante, di pesi rispettivi 1 e -1. Pertanto, continuando a supporre $\boldsymbol{T}$ emisimmetrico e, ad esempio, contravariante, le n^{n-r} quantità

$$\bar{T}_{\alpha_{r+1}\ldots\alpha_n} = \frac{1}{r!}\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_r\alpha_{r+1}\ldots\alpha_n} T^{\alpha_1\ldots\alpha_r}$$

sono le componenti di un tensore covariante, emisimmetrico per $r < n-1$, di peso $s-1$ e di ordine $n-r$ [6], le cui componenti essenziali sono date da

$$\bar{T}_{j_{r+1}\ldots j_n} = \varepsilon_{i_1\ldots i_r j_{r+1}\ldots j_n} T^{i_1\ldots i_r}, \tag{7}$$

nelle quali, come al solito, è da intendersi $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$, $j_{r+1} < j_{r+2} < \ldots < j_n$.

4. D'ora in poi intenderò sempre che sia $1 \leq r \leq n-1$.

Supposto di passare in V^n dalla base $(\boldsymbol{e}_\alpha)$ alla base $(\boldsymbol{e}_{\alpha'})$, le componenti essenziali del tensore $\bar{\boldsymbol{T}}$ definito nel n. precedente saranno ancora espresse, rispetto alla nuova base, dalle

$$\bar{T}_{j'_{r+1}\ldots j'_n} = \varepsilon_{i'_1\ldots i'_r j'_{r+1}\ldots j'_n} T^{i'_1\ldots i'_r}. \tag{7'}$$

D'altra parte, ricordando le (4), risulta

$$\bar{T}_{j'_{r+1}\ldots j'_n} = \Delta^{s-1} e^{j_{r+1}\ldots j_n}_{j'_{r+1}\ldots j'_n} \bar{T}_{j_{r+1}\ldots j_n}$$

e pertanto, sostituendo a primo membro delle (7') queste ultime, a secondo membro le (3) e ricordando le (7), si ottengono le

$$\Delta^{s-1}\varepsilon_{i_1\ldots i_r j_{r+1}\ldots j_n} e^{j_{r+1}\ldots j_n}_{j'_{r+1}\ldots j'_n} T^{i_1\ldots i_r} = \Delta^s \varepsilon_{i'_1\ldots i'_r j'_{r+1}\ldots j'_n} e^{i'_1\ldots i'_r}_{i_1\ldots i_r} T^{i_1\ldots i_r}.$$

[6] Nel caso in cui sia $r = n$ il tensore $\bar{\boldsymbol{T}}$ si riduce a uno scalare di peso $s-1$, dato da

$$\bar{T} = \frac{1}{n!}\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = T^{1\,2\ldots n}.$$

Per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{T}$, da queste, tenendo presenti le (5), (6), si deducono le

$$
e^{i'_1 \dots i'_r}_{i_1 \dots i_r} = \Delta^{-1} \delta^{i'_1 \dots i'_r j'_{r+1} \dots j'_n}_{i_1 \dots i_r j_{r+1} \dots j_n} e^{j_{r+1} \dots j_n}_{j'_{r+1} \dots j'_n}, \tag{8}
$$

nelle quali a primo membro compare il determinante della matrice

$$
\begin{Vmatrix}
e^{i'_1}_{i_1} & e^{i'_2}_{i_1} & \dots & e^{i'_r}_{i_1} \\
e^{i'_1}_{i_2} & e^{i'_2}_{i_2} & \dots & e^{i'_r}_{i_2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
e^{i'_1}_{i_r} & e^{i'_2}_{i_r} & \dots & e^{i'_r}_{i_r}
\end{Vmatrix}
$$

estratta dalla trasposta della matrice $\| e^{\alpha'}_{\alpha} \|$, mentre a secondo membro compare, moltiplicato per Δ^{-1}, il complemento algebrico della matrice

$$
\begin{Vmatrix}
e^{i_1}_{i'_1} & e^{i_1}_{i'_2} & \dots & e^{i_1}_{i'_r} \\
e^{i_2}_{i'_1} & e^{i_2}_{i'_2} & \dots & e^{i_2}_{i'_r} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
e^{i_r}_{i'_1} & e^{i_r}_{i'_2} & \dots & e^{i_r}_{i'_r}
\end{Vmatrix},
$$

omologa della precedente nella matrice $\| e^{\alpha}_{\alpha'} \|$. Data l'arbitrarietà di quest'ultima, si è così pervenuti al noto teorema, che risale a JACOBI (7),

Sia A una matrice quadrata non singolare e A^{-1}_{-1} *la sua reciproca. Ogni matrice quadrata estratta da* A^{-1}_{-1} *ha il determinante*

(7) Cfr. [3], pp. 201-203 e p. 377. JACOBI si riferisce, invece che alla matrice A^{-1}_{-1}, alla matrice aggiunta A'. In tal caso il teorema si enuncia:

Ogni matrice quadrata di ordine r $(1 \leq \mathrm{r} \leq \mathrm{n}-1)$ *estratta da* A' *ha il determinante eguale al complemento algebrico dell'omologa matrice estratta da* A *e moltiplicata per la* $(\mathrm{r}-1)$*-esima potenza del determinante di* **A**.

Questo teorema, per $r = n - 1$ era già noto a CAUCHY. Cfr. [1], p. 142. Una sua dimostrazione, nell'enunciato di JACOBI, è riportata in [5], in [2] e in vari altri testi di analisi algebrica.

eguale al complemento algebrico, diviso per il determinante di A, *dell'omologa matrice estratta da A.*

5. Si supponga ora che $\boldsymbol{T}$ sia un tensore emisimmetrico covariante di ordine r e di peso 0: in tal ipotesi le (4) si scrivono

$$T_{i'_1 i'_2 \dots i'_r} = e^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i'_1 i'_2 \dots i'_r} T_{i_1 i_2 \dots i_r}. \tag{9}$$

Qualora in V^n si passi dalla base $(\boldsymbol{e}_{\alpha'})$ alla base $(\boldsymbol{e}_\alpha)$, le componenti di $\boldsymbol{T}$ si trasformano secondo le

$$T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} = e^{\alpha'_1}_{\alpha_1} e^{\alpha'_2}_{\alpha_2} \dots e^{\alpha'_r}_{\alpha_r} T_{\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_r}$$

e da queste, con procedimento identico a quello che permesso di pervenire alle (4), si ottengono le

$$T_{i_1 i_2 \dots i_r} = e^{i'_1 i'_2 \dots i'_r}_{i_1 i_2 \dots i_r} T_{i'_1 i'_2 \dots i'_r}, \tag{9'}$$

che rappresentano le inverse delle (9) in quanto la matrice dei coefficienti che in quelle compaiono è non singolare [8]. L'inversa di tale matrice coincide pertanto con la matrice dei coefficienti che compaiono nelle (9').

Per l'arbitrarietà della matrice $\| e^{\alpha}_{\alpha'} \|$, il risultato ora conseguito vale per ogni matrice quadrata non singolare:

Sia A *una matrice quadrata non singolare,* A^{-1} *la sua inversa e* $\mathrm{A}_{\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{r}}}$ *la matrice di ordine* $\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{r}}$ *che ha per elementi i determinanti delle* $\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{r}}^2$ *matrici quadrate di ordine* r $(1 \leq \mathrm{r} \leq \mathrm{n})$ *estratti da* A [9]. *L'inversa di* $\mathrm{A}_{\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{r}}}$ *coincide con l'analoga costruita mediante la matrice* A^{-1} [10].

[8] Infatti, interpretate le (9) come un sistema di $\binom{n}{r}$ equazioni lineari, tale sistema, stanti le (9'), ammette almeno una soluzione e da tale osservazione, tenendo presenti il teorema di ROUCHÉ-CAPELLI e l'arbitrarietà di $\boldsymbol{T}$, segue l'asserto.

[9] Ogni riga di $A_{\binom{n}{r}}$ sarà formata dagli $\binom{n}{r}$ minori estratti da r righe di A; analogamente, ogni colonna sarà formata dagli $\binom{n}{r}$ minori estratti da r colonne di A.

[10] In formule

$$\left(A_{\binom{n}{r}}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)_{\binom{n}{r}}.$$

L'inversa di $A_{\binom{n}{r}}$ si può quindi semplicemente indicare con $\overset{-1}{A}_{\binom{n}{r}}$.

6. Il prodotto righe per colonne della matrice $A_{\binom{n}{r}}$ per la matrice $\overline{A}^{1}_{\binom{n}{r}}$ è identico al prodotto righe per righe (o colonne per colonne) di $A_{\binom{n}{r}}$ per la sua reciproca $\overline{A}^{1}_{-1\binom{n}{r}}$ e dà luogo alla matrice identica di ordine $\binom{n}{r}$: è quindi sufficiente ricordare il teorema dimostrato al n. 4 per ottenere come immediata conseguenza, almeno nell'ipotesi che A sia non singolare, la celebre *regola di Laplace* (11):

Una matrice quadrata di ordine n *ha il determinante eguale alla somma dei determinanti delle* $\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{r}}$ *matrici quadrate estratte da* r $(1 \leq \mathrm{r} \leq \mathrm{n} - 1)$ *sue linee parallele moltiplicati per i rispettivi complementi algebrici.*

Provata la validità di tale regola nell'ipotesi in cui la matrice sia non singolare, la sua validità in generale discende immediatamente dal principio d'identità dei polinomi in più variabili.

7. Viceversa, partendo dal teorema dimostrato al n. 5 e tenendo presente la regola di LAPLACE, dall'unicità della matrice inversa di una matrice non singolare discende immediatamente il teorema dimostrato al n. 4.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. L. CAUCHY, *Oevres*, (2) 1, Paris, 1905.
[2] E. CESÀRO, *Corso di Analisi Algebrica*, Torino, 1894.
[3] C. G. J. JACOBI, *Werke*, 3, Berlin, 1884.
[4] A. LICHNEROWICZ, *Éléments de calcul tensoriel*, Paris, 1958.
[5] N. TRUDI, *Teoria dei determinanti*, Napoli, 1862.

(11) Nei nn. precedenti si è fatto implicitamente uso di tale regola unicamente per il caso particolare in cui è $r = 1$, caso facilmente deducibile dalla definizione di determinante:

$$\det \| e^{\alpha}_{\alpha'} \| = \delta^{1\,2\,\ldots n}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} e^{\alpha_1}_{1'} e^{\alpha_2}_{2'} \ldots e^{\alpha_n}_{n'} = \delta^{\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_n}_{1\,2\,\ldots n} e^{1}_{\alpha'_1} e^{2}_{\alpha'_2} \ldots e^{n}_{\alpha'_n} .$$