Bollettino Unione Matematica Italiana

Giuseppe Pulvirenti

Un problema di Cauchy non ben posto per l'equazione delle onde.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.2, p. 138–144.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_2_138_0>

Un problema di Cauchy non ben posto per l'equazione delle onde

Nota di GIUSEPPE PULVIRENTI (a Catania) (*) (**)

Sunto. - *È dato dal seguente n. 1.*

1. In questo lavoro viene considerato il problema di CAUCHY per l'equazione delle onde

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0,$$

con i dati assegnati su una porzione del piano $y = 0$.

Si tratta di un problema non *ben posto* [1] che é stato recentemente trattato da J. R. CANNON [1]. Questo Autore ha provato l'esistenza e l'unicità della soluzione supponendo i dati iniziali analitici nella sola variabile x ed ha osservato come questa ipotesi fosse *essenziale.* La rappresentazione della soluzione ivi data è basata sul prolungamento analitico, nel piano complesso, dei dati iniziali.

Nella presente Nota diamo un altro teorema di esistenza della soluzione pervenendo ad una rappresentazione in serie di essa nel campo reale e proviamo, inoltre, che la soluzione é analitica rispetto ad x.

2. Sia E un insieme aperto e connesso di punti (x, y, t), dello spazio euclideo E^3 a tre dimensioni, contenuto nel semispazio $y > 0$ e tale che, se vi appartiene il punto $P \equiv (x, y, t)$, vi appartengono i punti interni al triangolo T_P di vertici $P \equiv (x, y, t)$, $P_1 \equiv (x, 0, t - y)$ e $P_2 \equiv (x, 0, t + y)$; denotiamo con F la parte

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 16 marzo 1963.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca n. 23 del comitato per la Matematica del C. N. R. per l'anno accademico 1962-63.

(1) Per una discussione su tali problemi cfr. ad es. C. PUCCI [3].

della frontiera di E contenuta nel piano $y = 0$ e, se k é un numero reale positivo, con E_k l'insieme dei punti di E per cui è $y < k$ (²).

Se, poi, D é un insieme di E^3 e σ é un numero positivo, denotiamo con Γ_σ la classe delle funzioni $f(x, y, t)$ dotate in D di derivate parziali rispetto ad x di qualsiasi ordine continue in (x, y, t) e tali che per qualche coppia di costanti positive M e ρ, con $\rho > \sigma$, risulti

$$\left| \frac{\partial^r}{\partial x^r} f(x, y, t) \right| < M \frac{r!}{\rho^r} \qquad \text{per } (x, y, t) \in D, \ r = 0, 1, 2, \ldots$$

Analoghe locuzioni adotteremo, con ovvie modifiche, nel caso che D sia un insieme di E^2 (³).

Consideriamo l'ipotesi:

a) *Siano* $\varphi_0(x, t)$ *e* $\varphi_1(x, t)$ *due funzioni del punto* (x, t) *di classe* $\Gamma_{e\sigma}$ *in* F *ed ivi, inoltre, rispettivamente di classe* C^3 *e* C^2.

Ci occuperemo, precisamente, del problema di CAUCHY:

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0 \qquad \text{in } E_\sigma, \tag{1}$$

$$u(x, 0, t) = \varphi_0(x, t), \qquad u_y(x, 0, t) = \varphi_1(x, t) \qquad \text{su } F, \tag{2}$$

intendendo per soluzione di esso (cfr. J. R. CANNON [1]) ogni funzione $u(x, y, t)$ di classe C^2 in E_σ e di classe C^1 in $E_\sigma \cup F$ verificante le relazioni (1) e (2).

Dimostriamo il seguente

TEOREMA. - *Se* $\varphi_0(x, t)$ *e* $\varphi_1(x, t)$ *sono due funzioni verificanti l'ipotesi* a) *esiste una ed una sola soluzione del problema* (1), (2); *tale soluzione é di classe* C^2 *in* $\bar{E}_\sigma$, *ivi, inoltre, di classe* Γ_σ, *ed ha la seguente espressione:*

$$u(x, y, t) = G(x, y, t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I^{2n} \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} G(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \bar{E}_\sigma, \tag{3}$$

(²) F risulta, perciò, un insieme chiuso del piano $y = 0$ tale che ogni suo punto é di accumulazione di punti interni ad esso: ovviamente delle medesime proprietà gode, per ogni $k > 0$, l'insieme $\bar{E}_k$ (chiusura di E_k) dello spazio euclideo E^3.

(³) Evidentemente l'appartenenza di una funzione f ad una classe del tipo Γ_σ ne implica l'analiticità rispetto alla variabile x.

dove

$$(4) \qquad G(x, y, t) = \frac{\varphi_0(x, t+y) + \varphi_0(x, t-y)}{2} + \frac{1}{2}\int_{t-y}^{t+y} \varphi_1(x, \tau)d\tau$$

ed I^α *é, per ogni* x, *l'integrale di Riemann-Liouville, nello spazio lorentziano a due dimensioni* (y, t) (4).

Dimostrazione. - L'unicità della soluzione del problema (1), (2) discende dal relativo teorema di J. R. Cannon. Noi dimostreremo che la $u(x, y, t)$ data dalla (3) é una funzione di classe C^2 in $\bar{E}_\sigma$, ivi, inoltre di classe Γ_σ, e soluzione del problema (1), (2).

Osserviamo, innanzi tutto, che la $G(x, y, t)$ data dalla (4) è, per l'ipotesi *a*), una funzione di classe C^3 in $\bar{E}$, dotata ivi di derivate parziali rispetto ad x di qualsiasi ordine continue in (x, y, t) e, poichè esistono due costanti positive M e ρ, con $\rho > e\sigma$ tali che

$$\left|\frac{\partial^p}{\partial x^p}\varphi_i(x, t)\right| < M\frac{p\,!}{\rho^p}, \qquad (x, t) \in F, \qquad i = 0, 1, \quad p = 0, 1, 2, \ldots,$$

(4) Rinviando per maggiori dettagli a M. Riesz [4], G. F. D. Duff [2], ricordiamo, qui, brevemente che, come é ben noto, se $f(Q)$ é una funzione verificante opportune ipotesi ed $\alpha > m-2$, l'integrale di Riemann-Liouville ha la seguente espressione

$$(*) \qquad I^\alpha f(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)}\int_{D^P} r_{PQ}^{\alpha-m} f(Q)\,dQ$$

dove

$$H_m(\alpha) = \pi^{\frac{m-2}{2}} 2^{\alpha-1}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+2-m}{2}\right),$$

r_{PQ} denota la distanza lorentziana tra i punti $P \equiv (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, $Q \equiv (q_1, q_2, \ldots, q_m)$ cioé

$$r_{PQ} = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 - (p_2 - q_2)^2 - \ldots - (p_m - q_m)^2},$$

e D^P indica l'insieme dei punti $Q \equiv (q_1, q_2, \ldots, q_m)$ tali che $r_{PQ}^2 \geq 0$, $q_1 \leq p_1$ (cono retrogrado). Vale la seguente relazione

$$I^\alpha I^\beta f(P) = I^{\alpha+\beta} f(P).$$

Per dare significato alla (*) nel nostro caso conveniamo che $G(x, y, t) = 0$ per $y < 0$; in effetti, allora, l'integrazione risulta estesa al triangolo T_P. Osserviamo, infine, che, come è immediato verificare, se $\bar{P} \in \bar{E}$ risulta $T_{\bar{P}} \subset \bar{E}$.

risulta

$$(5)\quad \left|\frac{\partial^p}{\partial x^p} G(x, y, t)\right| < (1+y)M\frac{p!}{\rho^p}, \qquad (x, y, t) \in \bar{E}, \qquad p = 0, 1, 2, \dots.$$

Intanto, per quanto prima ricordato nella nota (4), si ha per $(x, y, t) \in \bar{E}$

$$I^{2n}G(x, y, t) = \frac{1}{2^{2n-1}[(n-1)!]^2}\int_{T_P} [(y-\eta)^2-(t-\tau)^2]^{n-1} G(x, \eta, \tau)\,d\eta\,d\tau$$

da cui

$$\frac{\partial^p}{\partial x^p} I^{2n}\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} G(x, y, t) = I^{2n}\frac{\partial^{2n+p}}{\partial x^{2n+p}} G(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \bar{E}.$$

Risultando, per la (5)

$$\left|\frac{\partial^{2n+p}}{\partial x^{2n+p}} G(x, y, t)\right| < (1+y)\frac{M(2n+p)!}{\rho^{2n+p}}, \qquad (x, y, t) \in \bar{E},$$

si ha, allora, in $\bar{E}$

$$\left|\frac{\partial^p}{\partial x^p} I^{2n}\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} G(x, y, t)\right| \leq \frac{M(1+y)}{\rho^p}\,\frac{(2n+p)!}{2^{2n-1}[(n-1)!]^2}\left(\frac{y}{\rho}\right)^{2n}.$$

Posto, poi,

$$(6)\qquad A_n^p(y, \rho) = \frac{M(1+y)}{\rho^p}\,\frac{(2n+p)!}{2^{2n-1}[(n-1)!]^2}\left(\frac{y}{\rho}\right)^{2n}$$

si verifica immediatamente che se $y < \rho$ la serie di termine generale (6) é convergente qualunque sia l'intero non negativo p.

La serie che figura a secondo membro della (3) risulta, allora, uniformemente convergente in $\bar{E}_\sigma$, unitamente a quelle delle derivate dei suoi termini rispetto ad x di ordine p qualsiasi. Si può quindi derivare per serie rispetto ad x ed essendo la $G(x, y, t)$ dotata di derivate rispetto ad x d'ordine qualsiasi continue tale risulta la $u(x, y, t)$ data dalla (3) e si ha

$$\frac{\partial^p}{\partial x^p} u(x, y, t) = \frac{\partial^p}{\partial x^p} G(x, y, t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I^{2n} \frac{\partial^{2n+p}}{\partial x^{2n+p}} G(x, y, t).$$

Inoltre, essendo

$$(2n+p)! < (2n)!\, p!\, e^{2n+p}$$

si ha in $\bar{E}_\sigma$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| I^{2n} \frac{\partial^{2n+p}}{\partial x^{2n+p}} G(x, y, t) \right| \leq \frac{p!}{\left(\frac{\rho}{e}\right)^p} \sum_{n=1}^{\infty} M(1+y) \frac{(2n)!}{2^{2n-1}[(n-1)!]^2} \left(\frac{y}{\rho/e}\right)^{2n} =$$

$$= \frac{p!}{\left(\frac{\rho}{e}\right)^p} \sum_{n=1}^{\infty} \overset{0}{A}_n(y, \rho/e) \leq \frac{p!}{\left(\frac{\rho}{e}\right)^p} \sum_{n=1}^{\infty} \overset{0}{A}_n(\sigma, \rho/e)$$

da cui, per quanto detto a proposito della (6) e per la (5), se $(x, y, t) \in \bar{E}_\sigma$, e quindi $y \leq \sigma$, esiste $K > 0$ tale che la $u(x, y, t)$ verifica la condizione

$$\left| \frac{\partial^p}{\partial x^p} u(x, y, t) \right| < K \frac{p!}{\left(\frac{\rho}{e}\right)^p}, \qquad (x, y, t) \in \bar{E}_\sigma, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots.$$

Essendo $\rho/e > \sigma$ abbiamo provato che la $u(x, y, t)$ data dalla (3) é di classe Γ_σ in $\bar{E}_\sigma$.

Passiamo, ora, alla derivabilità rispetto ad y della $u(x, y, t)$. A tale scopo osserviamo, innanzi tutto, che per l'ipotesi $a)$ sia $G(x, y, t)$ che tutti i termini della serie a secondo membro della (3) sono dotati di derivate continue prime e seconde rispetto ad y. Risulta inoltre se $n > 1$

$$\frac{\partial}{\partial y} I^{2n} \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} G(x, y, t) =$$

$$= \frac{1}{2^{2n-2}(n-1)!(n-2)!} \int_{T_P} [(y-\eta)^2 - (t-\tau)^2]^{n-2} (y-\eta) \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} G(x, \eta, \tau) d\eta d\tau,$$

nonchè

$$\left|\frac{\partial}{\partial y} I^{2n} \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} G(x, y\ t)\right| \leq \frac{M(1+y)}{\rho} \frac{(2n)!}{2^{2n-2}(n-1)!(n-2)!}\left(\frac{y}{\rho}\right)^{2n-1};$$

posto

$$B_n(y, \rho) = \frac{M(1+y)}{\rho} \frac{(2n)!}{2^{2n-2}(n-1)!(n-2)!}\left(\frac{y}{\rho}\right)^{2n-1}$$

si verifica, analogamente a quanto fatto per la (6) che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} B_n(y, \rho)$ é convergente se $y < \rho$. Si é provato così che in $\bar{E}_\sigma$ la (3) é derivabile una prima volta per serie rispetto ad y e tale derivata é una funzione continua.

Se poi é $n > 2$ risulta

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} I^{2n} \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} G(x, y, t) =$$

$$= \frac{1}{2^{2n-2}(n-1)!(n-2)!} \int_{T_P} [(2n-3)(y-\eta)^2 - (t-\tau)^2][(y-\eta)^2 -$$

$$- (t-\tau)^2]^{n-3} \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} G(x, \eta, \tau) d\eta d\tau$$

nonché

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial y^2} I^{2n} \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} G(x, y, t)\right| \leq \frac{M(1+y)}{\rho^2} \frac{(2n-3)(2n)!}{2^{2n-2}(n-1)!(n-2)!}\left(\frac{y}{\rho}\right)^{2n-2};$$

poiché la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n(y, \rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M(1+y)}{\rho^2} \frac{(2n-3)(2n)!}{2^{2n-2}(n-1)!(n-2)!}\left(\frac{y}{\rho}\right)^{2n-2}$$

é convergente se $y < \rho$ si ha che in $\bar{E}_\sigma$ la (3) é derivabile per serie rispetto ad y due volte e la derivata seconda é pure una funzione continua.

In maniera perfettamente analoga si prova che la (3) é dotata di tutte le derivate prime e seconde, continue, rispetto ad x, y, t.

La $u(x, y, t)$ data dalla (3) risulta quindi una funzione di classe C^2 in $\bar{E}_\sigma$ ed ivi, inoltre, di classe Γ_σ.

Per quanto si é detto é, allora, lecita la derivazione e l'integrazione per serie nella (3) e si ha in $\bar{E}_\sigma$

$$u = G - I^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(G + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I^{2n} \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} G\right) = G - I^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u$$

cioè la $u(x, y, t)$ verifica l'equazione integrodifferenziale

$$u(x, y, t) = \frac{\varphi_0(x, t+y) + \varphi_0(x, t-y)}{2} + \frac{1}{2}\int_{t-y}^{t+y} \varphi_1(x, \tau)d\tau - \frac{1}{2}\int_{T_P} u_{xx}(x, \eta, \tau)d\eta d\tau. \tag{7}$$

Pertanto $u(x, y, t)$ é soluzione del problema di Cauchy (1), (2), come segue dalla ben nota risoluzione del problema di Cauchy per l'equazione di D'Alembert non omogenea. Il teorema é così completamente dimostrato.

Osserviamo, infine, che, nelle ipotesi fatte, se u é soluzione del problema (1), (2) verifica la (7) e da questa, con noto procedimento di iterazione, si perviene alla espressione (3) della soluzione.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. R. Cannon, *A Cauchy problem for the wave equation for a space-like region*, « Le Matematiche », 16 (1961), pp. 43-50.

[2] G. F. D. Duff, *Partial differential equations*, Mathematical expositions n. 9, University of Toronto (1956).

[3] C. Pucci, *Sui problemi di Cauchy non « ben posti »*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei », (VIII), 18 (1955), pp. 473-477.

— — *Su un problema esterno per la equazione delle onde*, « Ann. di matem. pura ed appl. », (IV), 56 (1961), pp. 69-78.

[4] M. Riesz, *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*, « Acta Mathematica », 81 (1949), pp. 1-223.