
BOLLETTINO

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Recensioni.

- * G. Scorza, Opere Scelte, Vol. II, Edizioni Cremonese, Roma, 1961 (Giuseppe Tallini)
- * B. Finzi, M. Pastori, Calcolo Tensoriale e Applicazioni, II edizione, Zanichelli, Bologna (Giovanni Zin)
- * M. Fisz, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1958 (Bruno de Finetti)
- * I. M. Gelfand, A. M. Jaglom, A. N. Kolmogoroff, Chiang Tse-Pei, I. P. Zaregradski, Arbeiten zur Informationstheorie, II, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1958 (Bruno de Finetti)
- * W. Gröbner, Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen, Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960 (Antonio Pignedoli)
- * H. Arzelès, Milieux conducteurs ou polarisables en mouvement, Gauthier-Villars, Paris, 1959 (Antonio Pignedoli)
- * E. Lukacs, Characteristic functions, C. Griffin e C., London, 1960 (Giovanni Sansone)
- * R. Zurmühl, Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker, Springer-Verlag, Berlin, 1961 (F. G. Tricomi)
- * Provisional Intern. Computing Centre, Proceedings of the Symposium on the Numerical Treatment of Ordinary Differential Equations, Integral and Integro-Differential Equations, Birkhäuser, Basel, 1960 (F. G. Tricomi)
- * P. Medgyssy, Decomposition of Superpositions of Distribution Functions, Publ. House Hungarian Acad. Sci., Budapest, 1961 (F. G. Tricomi)
- * B. V. Gnedenko, A. Ya. Khinchin, An Elementary Introduction to the Theory of Probability, Freeman and Co., San Francisco, 1961 (F. G. Tricomi)
- * N. W. Smirnov ed., Tables for the Distribution and Density Functions of t-Distribution ("Student's" Distribution), Pergamon Press, Oxford, 1961 (F. G. Tricomi)
- * M. Hukuhara, T. Kimura, T. Matura, Équations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe, Math. Soc. of Japan, Tokyo, 1961 (F. G. Tricomi)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 17
(1962), n.1, p. 108–119.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1962_3_17_1_108_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

RECENSIONI

G. SCORZA: *Opere scelte*, a cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche, volume II^o. Edizioni Cremonese, Roma 1961, pp. 607. L. 6000.

È stato pubblicato il secondo dei tre volumi nei quali saranno raccolte, in ordine cronologico, le opere scelte di Gaetano Scorza. Il primo volume è apparso nel 1960 e la sua recensione trovasi nel fascicolo di dicembre di questo stesso periodico.

Il presente volume abbraccia il periodo 1915-1919. Esso comprende due fondamentali Memorie a carattere monografico, una sulla teoria generale delle matrici di Riemann ed un'altra sulle algebre di ordine qualunque ed i loro legami con la teoria delle matrici di Riemann; inoltre altri quattordici Lavori, pur essi di notevole interesse, che vanno dallo studio degli integrali abeliani riducibili, alle varietà algebriche con indice di singolarità massimo, alle involuzioni sulle curve ellittiche a modulo generale, allo studio di notevoli matrici riemanniane, a varie questioni connesse con le varietà abeliane, ecc....

Esaminiamo ora più dettagliatamente il contenuto dei Lavori raccolti nel volume.

Iniziano due Note lincee del 1915 sugli integrali abeliani riducibili. L'Autore prosegue lo studio di tali integrali, iniziato da Weierstrass, Picard e Poincaré e proseguito dal Castelnuovo e dal Severi. Qui lo Scorza esamina le conseguenze cui conduce il teorema di Poincaré per le funzioni abeliane ad un numero qualunque di variabili semplicemente singolari, affermando che, se una varietà algebrica di irregolarità superficiale p ammette un sistema di q integrali (semplici di 1^a specie) riducibili con $2q$ periodi ridotti, ammette anche un sistema di $p-q$ integrali riducibili con $2(p-q)$ periodi ridotti, i due sistemi costituendo insieme un sistema di p integrali linearmente indipendenti. Riesce a trovare un legame tra quel teorema e le relazioni bilineari a coefficienti interi che legano i periodi di due integrali semplici di 1^a specie appartenenti ad una stessa varietà algebrica qualsiasi. Egli ritrova così anche il teorema di Poincaré ed altri risultati del Severi per una via agevole e piana, facendo ricorso al teorema di esistenza delle funzioni abeliane in una forma da lui stesso data due anni prima.

Segue un Lavoro sulla varietà di Veronese e le forme quadratiche definite, nel quale considera la totalità delle forme quadratiche f a coefficienti reali in $r+1$ variabili reali e caratterizza geometricamente nello spazio a $\frac{r(r+3)}{2}$ dimensioni rappresentativo di tutte le forme quadratiche in quel

dato numero di variabili, la varietà a $\frac{r(r+3)}{2}$ dimensioni rappresentativa delle forme quadratiche definite.

Sono riportate quindi due altre Note lincee sulle varietà algebriche con

indice di singolarità massimo. In esse stabilisce che: le varietà algebriche V_p di irregolarità superficiale $p > 1$, su cui ad ogni integrale semplice di 1ª specie sono infinitamente vicini degli integrali ellittici, sono tutte e sole quelle, effettivamente esistenti, per cui l'indice di singolarità è uguale a $p^2 - 1$ (dato un integrale I semplice di 1ª specie di V , dotato nel ciclo l del periodo Ξ_r , ed essendo G un insieme di integrali semplici di 1ª specie di V , si dice che ad I sono infinitamente vicini degli integrali di G , se, in corrispondenza ad ogni numero positivo (non nullo ϵ , possono trovarsi infiniti integrali di G , tali che, detto I uno qualunque di essi, e detto ξ_r il periodo di I nel ciclo l_r , si abbia $|\Xi_r - \xi_r| < \epsilon$, per $r = 1, 2, \dots, 2p$). Lo Scorza dimostra inoltre che una varietà algebrica di irregolarità superficiale $p > 1$, che sia almeno $2p - 1$ volte singolare, contiene infiniti sistemi regolari di integrali semplici di 1ª specie riducibili.

Si ha poi una Nota lineea ancora sugli integrali abeliani riducibili, ricollegantesi con le due precedenti Note sullo stesso argomento e che mira a precisare sempre meglio le proprietà delle varietà algebriche dotate di sistemi regolari di integrali riducibili.

Segue una Nota sulle varietà algebriche con sistemi regolari isolati di integrali riducibili nella quale si dimostra che, se una varietà algebrica possiede due sistemi regolari complementari isolati di integrali riducibili, ogni altro sistema regolare della varietà (eventualmente esistente) o appartiene ad uno dei due sistemi in discorso, o congiunge un sistema appartenente all'uno con un sistema appartenente all'altro. Ne segue l'interessante risultato che, se p è l'irregolarità superficiale di una varietà algebrica, il numero dei suoi sistemi regolari isolati di integrali riducibili è necessariamente finito e del tipo $2^n - 2$, ove, l'intero n non supera p e sta ad indicare il numero dei sistemi regolari isolati che non provengono dal congiungere sistemi regolari isolati di dimensione inferiore.

Si ha ancora un Lavoro nello stesso ordine di idee del precedente, sulle varietà algebriche con infiniti sistemi regolari di integrali riducibili, nel quale studia la configurazione dei sistemi regolari di siffatti integrali di una varietà algebrica nell'ipotesi che essi siano infiniti.

Segue una Memoria sul teorema fondamentale per le funzioni abeliane singolari, il cui scopo è l'estensione di un classico teorema di Humbert, riguardante la teoria delle funzioni iperellittiche singolari, al caso di una funzione abeliana singolare con un numero qualunque di variabili indipendenti.

Il successivo Lavoro è una Memoria a carattere monografico, di circa 150 pagine, pubblicata nei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo del 1916, sulla teoria generale delle matrici di Riemann ed alcune sue applicazioni.

Si ha poi una breve Nota sulla quartica di Klein e la quintica di Snyder. Segue una Nota sulle serie col termine generale convergente a zero nella quale estende ad una serie a termini complessi un risultato stabilito dal Cipolla secondo cui una serie a termini reali col termine generale convergente a zero, o è regolare, o ammette come valori limiti tutti i punti di un intervallo (limitato o no). La breve Nota successiva — tratta da una lettera scritta dallo Scorza ad Eugenio Bertini — mostra come il classico teorema di Capelli sulla caratteristica della matrice di Sylvester, costruita con i coefficienti di due forme binarie f e φ si lasci dedurre nell'ambito della teoria delle involuzioni situate sopra una retta.

Nella Nota lineea che segue, lo Scorza risolve, per una curva ellittica qualunque, la questione — esaminata da R. Torelli per le curve ellittiche a modulo generale — di determinare, sopra una curva siffatta, le involuzioni birazionalmente identiche ad essa. Si ha poi una Nota sopra alcune notevoli matrici riemanniane, nella quale fornisce notevoli esempi di matrici riemanniane di genere qualunque. Segue un Lavoro concernente alcune questioni di geometria sopra una varietà abeliana qualunque nel quale

estende la teoria delle corrispondenze algebriche sopra una curva algebrica dal punto di vista trascendente, alle varietà abeliane, mostrando analogie e differenze tra i due casi. Il Lavoro successivo è dedicato alle varietà abeliane.

Chiude il volume un'altra importante Memoria a carattere monografico che riguarda le algebre di ordine qualunque e le matrici di Riemann. In essa, poggiando sull'osservazione che l'insieme delle sostituzioni reali corrispondenti alle omografie reali di una matrice di Riemann non singolare può considerarsi come un'algebra reale primitiva, e quindi equivalente, per un teorema di Frobenius, all'algebra dei numeri reali, dei numeri complessi ordinari o dei quaternioni, rileva il legame strettissimo esistente tra la teoria delle matrici riemanniane e le algebre a più unità e si serve di queste come di un potente mezzo di ricerca per le proprietà di quelle matrici. Nella prima parte della Memoria espone a larghi tratti la teoria generale delle algebre di ordine qualunque, fornendo così una preziosa monografia sull'argomento, mentre nella seconda espone, secondo il punto di vista suaccennato, i nuovi risultati da lui conseguiti dal 1917 in poi sulla teoria generale delle matrici di Riemann.

GIUSEPPE TALLINI

B. FINZI - M. PASTORI: *Calcolo Tensoriale e Applicazioni*, Zanichelli, Bologna II edizione.

La seconda edizione di quest'opera costituisce la prova tangibile del favore con cui l'edizione precedente è stata accolta dal pubblico degli studiosi. Tuttavia la nuova edizione si presenta con numerosi pregi rispetto alla prima, sia per quanto riguarda il contenuto e sia per l'aspetto tipografico.

La notorietà dell'opera ci esime dall'analizzarla particolareggiatamente e ci consente di limitarci al raffronto tra le due edizioni.

In quella recente, se lo schema generale relativo alla esposizione del calcolo tensoriale è rimasto inalterato, è stata invece notevolmente arricchita la parte destinata alle applicazioni, per l'inserimento di due nuovi capitoli e per l'aggiornamento dell'ultimo capitolo sulla Relatività, il cui ampliamento ha indotto gli Autori a scinderlo in due, portando così il numero complessivo dei capitoli, rispetto alla vecchia edizione, da 10 a 13 e le pagine da 427 a 510.

Uno dei capitoli aggiunti, l'VIII, riguarda la Meccanica del corpo rigido nei suoi vari aspetti di Cinematica, Statica e Dinamica. In tale argomento l'uso del calcolo tensoriale consente di chiarire alcuni concetti e di coordinare molti risultati. L'altro capitolo aggiunto, il X, si riferisce alla Meccanica analitica. E qui, sempre con il metodo tensoriale, vengono esaminati il moto del corpuscolo libero, i sistemi olonomi a vincoli fissi, il caso dei vincoli mobili e quello dei vincoli anolonomi.

In quanto poi al capitolo sulla Relatività (il XII), nella prima parte di esso si avverte subito una nuova distribuzione della materia. Si incontra poi un paragrafo nuovo e di fine gusto sui campi gravitazionali vuoti e sulla stazionarietà (minimo) dell'azione, dove si dimostra come da tale stazionarietà possano dedursi le equazioni gravitazionali. Rifatta è la trattazione delle azioni gravitazionali dell'energia elettromagnetica. Arricchito risulta pure il paragrafo sulla cosmologia relativistica, dove gli universi dinamici risultano più ampiamente considerati, fino alla teoria dell'effetto Hubble e dell'universo in espansione.

Nella vecchia edizione il capitolo inerente alla relatività chiudeva con un paragrafo sulla teoria unitaria del Weyl. Ma esso era stato scritto prima dell'edizione 1950 del *The Meaning of Relativity*. Il necessario aggiornamento

ha indotto gli Autori a rifare la trattazione dell'argomento. Essi vi hanno dedicato un capitolo, il XIII dell'opera. In esso, dopo un'enunciazione del problema unitario, si esaminano le teorie riemanniane pentadimensionali, la teoria proiettiva relativistica di Veblen, i vari e celebri tentativi inerenti all'ampliamento della metrica e all'ampliamento della connessione riemanniana, la teoria affine di Weyl. Si espone infine l'ultima teoria einsteiniana, pervenendo alle equazioni di campo attraverso uno schema logico diverso da quello seguito dal suo autore.

Ma oltre alle innovazioni descritte, che sono le più notevoli, altri complementi e rifacimenti sono stati introdotti qua e là nel corso di tutta l'opera, come, nel Cap. IV, un prezioso paragrafo sui campi tensoriali negli spazi pseudoeuclidei; nel Cap. V risulta rifatto il paragrafo sugli spazi riemanniani; nel capitolo sulla Meccanica dei continui deformabili figurano due nuovi paragrafi sulla statica dei fluidi e sullo strato limite; nel capitolo sull'Elettromagnetismo (il XI) un nuovo paragrafo riguarda il principio dell'azione stazionaria e la descrizione del campo mesonico.

Tale è sostanzialmente il quadro delle più notevoli innovazioni che si riscontrano nella seconda edizione

Molti possono obiettare che se esistono capitoli della fisica in cui il calcolo tensoriale è strumento indispensabile per la descrizione e per l'indagine, non altrettanto può dirsi per molti capitoli della meccanica, i quali si sono sviluppati senza l'ausilio di tale calcolo. Ma a tale punto si deve osservare che la dimestichezza con l'uso del calcolo tensoriale determina una sensibilità particolare che consente subito di avvertire fra le leggi della fisica la presenza del tensore e non consente di non metterlo in evidenza. Del resto la tendenza ad estendere il campo di azione di metodi e di schemi si accompagna alla eterna tendenza del fisico verso concezioni generali rivolte al coordinamento di un numero sempre maggiore di leggi.

È sotto tale profilo che va intesa l'opera di Finzi e Pastori, alla quale vanno riconosciuti notevoli meriti, come quello di presupporre nel lettore le sole conoscenze matematiche del primo biennio universitario e di trasportarlo da tale livello fino a vette che sono tra le più alte della scienza; la riuscita sintesi di una vastissima materia; la scelta degli argomenti, alcuni dei quali tra i più affascinanti e più attuali del pensiero scientifico.

Indubbiamente soltanto una lunga esperienza nell'arte espositiva poteva consentire di raggiungere tutti tali obiettivi e di trovare i necessari compromessi per poter parlare simultaneamente a matematici, fisici ed ingegneri.

Per le suggestioni di cui è ricca questa seconda edizione, essa non mancherà di suscitare l'interesse degli studiosi. E ciò costituisce una indiscutibile benemerita degli Autori, che tanto impegno hanno riposto nel tener viva quella luce che fu accesa nel nostro Paese da Gregorio Ricci Curbastro e fatta più splendida da Tullio Levi Civita.

GIOVANNI ZIN.

M. FISZ: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik*, Band 40 degli «Hochschulbücher für Mathematik», Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1958 (traduzione dalla 2^a ed. migliorata e ampliata del testo polacco - Warszawa, 1958 - che costituisce il T. 18 di «Biblioteka Matematyczna». Pagg. X + 528, 37 figure. Prezzo non indicato.

Il rapido estendersi in molteplici direzioni dei campi di ricerca e dei campi di applicazione riguardanti la teoria delle probabilità e la statistica matematica rende estremamente difficile il compito di preparare un'espo-

sizione adatta come libro di testo tendenzialmente completo. Lo rileva lo stesso A. nella prefazione, spiegando di aver prescelto i principali risultati negli argomenti più fondamentalmente significativi, limitando la generalità ove didatticamente opportuno. Naturalmente, il problema resta, e ciascuno sarebbe in dubbio e deciderebbe in parte diversamente nella scelta e nel coordinamento delle parti da sacrificare o da includere per una trattazione più o meno approfondita o sommaria, più o meno estesa o succinta. La scelta di Fisž appare senz'altro tra le più felici sotto diversi aspetti, e in primo luogo per il modo in cui partendo dagli argomenti più semplici (trattati senza presupporre conoscenze matematiche elevate) conduce sempre in modo chiaro a molti dei risultati più moderni e impegnativi (seppure a volte — come detto — in forma leggermente semplificata).

Il libro è diviso in due parti: calcolo delle probabilità e statistica matematica. Nella prima, oltre gli argomenti consueti (eventi, numeri aleatori, distribuzioni e loro parametri e funzioni caratteristiche, principali distribuzioni di probabilità) si hanno succinte indicazioni sulle catene di Markoff e sui processi stocastici ed una notevole trattazione dei teoremi-limite. Nella seconda, oltre ai metodi abituali della statistica matematica « oggettivistica » (campioni, tests, metodi di stima, analisi della varianza, analisi sequenziale), viene in particolare approfondito lo studio dello scostamento tra distribuzione probabilistica e « distribuzione statistica » (risultati prevalentemente dovuti alla scuola russa: Gliwenski, Kolmogoroff, Smirnow, ecc.).

Naturalmente ogni eventuale discorso sulle omissioni che uno avrebbe ritenuto preferibile e possibile evitare non può basarsi su un indice dei capitoli quanto piuttosto su un'analisi di molti dettagli. Non volendo addentrarsi in tale via, si può esprimere genericamente l'impressione che spesso qualche maggiore sviluppo o l'introduzione di qualche concetto e risultato ulteriore sugli argomenti più « elementari » avrebbe non solo arricchito di per sé la visione risultante ma avrebbe preparato il terreno a risultati successivi più difficili rendendoli prevedibili e semplificandone la dimostrazione. Basti un esempio: le considerazioni preliminari di Gnedenko e Koroljuk per la dimostrazione dei teoremi di Kolmogoroff e Smirnow si sarebbero potute anticipare come ampliamento dello studio del gioco di testa e croce, non solo lumeggiandone il vero carattere (non di espediente ad hoc) ma consentendo di trattare, accennandoli senza ulteriore sforzo, i problemi (non menzionati) circa la « rovina dei giocatori » sia in schemi elementari che in processi stocastici e di riallacciarvi molti altri possibili cenni ad argomenti e applicazioni interessanti.

Le questioni d'impostazione, concettuali e critiche, vengono in certo senso eluse: vengono illustrate le idee alla base di singoli metodi senza rilevare i contrasti o accennandovi di sfuggita senza entrare nel merito della discussione (vedasi ad es. il cenno in poche righe a p. 418 sul fondamentale contrasto tra bayesiani e no; della stessa impostazione di Wald — involontario ponte tra le due sponde — egli omette quanto si basa sull'essenziale concetto di perdita — Loss Function — che introduce un'interpretazione economica nella teoria delle decisioni).

Delle applicazioni si parla quasi esclusivamente negli esempi (che costituiscono parti a sé stanti, stampate in carattere piccolo); molti sono belle succinte trattazioni di problemi effettivi importanti, altri semplici esemplificazioni schematiche.

Qualche neo da rilevare: la scarsità di indicazioni storiche (p. es. non sono nominati né Cantelli né Borel, pur trattandosi, naturalmente, della legge forte dei grandi numeri) e un paio di inesattezze in dimostrazioni (p. 167, Teor. 6.1: non basta la convergenza in *un* intervallo $|t| \leq \tau$, ma occorre in *ogni*, come è chiaro per il Teor. di Gnedenko a p. 108; p. 182, Teor. 9.2: che sia $\max(\sigma_k/C_n) \rightarrow 0$ è una restrizione ulteriore e non una conseguenza delle ipotesi precedenti).

Nonostante sia apparso opportuno soffermarsi su qualche rilievo, va ripetuto, concludendo, che il libro costituisce uno dei più rimarchevoli e riusciti tentativi di condensare in un'esposizione chiara e didatticamente efficace un quadro quanto più completo possibile degli argomenti secondo la prospettiva del momento.

BRUNO DE FINETTI

I. M. GELFAND, A. M. JAGLOM, A. N. KOLMOGOROFF, CHIANG TSE-PEI, I. P. ZAREGRADSKI: *Arbeiten zur Informationstheorie, II*, « Mathematische Forschungsberichte » dello Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlino, 1958, pp. 77.

Il presente fascicolo (che fa seguito al I, stesso titolo, che conteneva 5 lavori, e fu recensito in Boll. U.M.I., 1958, n. 4) contiene analogamente la traduzione dal russo di quattro nuovi lavori sulla teoria dell'informazione.

Il più esteso è il primo, di I. M. Gelfand e A. M. Jaglom, sul calcolo della quantità d'informazione su una funzione aleatoria contenuta in un'altra funzione aleatoria. Si tratta anche dell'argomento più impegnativo, che affronta il problema di precisare concettualmente e di spingere alla costruzione di effettivi metodi di calcolo l'applicazione della teoria dell'informazione nel campo indicato. Quest'ultimo compito è approfondito nel 2° capitolo del lavoro con riferimento al caso gaussiano, dapprima per vettori (§ 1) e quindi per processi stocastici (§ 2), giungendo a risultati che conducono a soluzioni esplicite per alcuni importanti casi (§ 3). La trattazione si basa sulla considerazione di processi stocastici « in senso generalizzato » (cioè, pensandoli osservabili attraverso operatori lineari, ossia al modo di Schwartz), nel caso gaussiano si è condotti ad un'elegante interpretazione iperspaziale (come tale introdotta da Kolmogoroff nel 1941⁽¹⁾) in cui si utilizzano operatori-proiezione P_1 , P_2 sui sottospazi H_1 , H_2 determinati dai vettori che intervengono nel problema, o gli angoli stazionari fra di essi $(\alpha_1 \dots \alpha_l)$:

l'informazione vale $I = -\log |\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \dots \sin \alpha_l| = -\frac{1}{2} \log \det (E - B_1)$,

dove sia E = matrice-unità, $B = P P P$ (oppure con $B = P P P$ al posto di B) nel caso di partenza e analogamente in quelli più complessi.

Gelfand, Kolmogoroff e Jaglom nel 2° lavoro e Chiang Tse-ei nel 3° si occupano di questioni critiche sulla definizione dell'informazione connesse alle modalità di passaggio al limite — da partizioni finite — per definire la quantità d'informazione come estremo superiore.

L'ultimo lavoro, di Zaregradski, si occupa (nel senso di un contributo di Chintschin nel precedente fascicolo I), della capacità di trasmissione, risp. ergodica e stazionaria, di un canale stazionario con memoria finita, allo scopo di provare l'invertibilità del teorema stabilito al riguardo da Shannon.

⁽¹⁾ Una tale rappresentazione era stata usata dallo scrivente (sia pure per applicazioni elementari, e non so se per la prima volta) nella nota *A proposito di « correlazione »*, « Suppl. Statistico ai Nuovi Problemi ecc. » A. III, nn. 1-2, Ferrara 1937.

BRUNO DE FINETTI

W. GRÖBNER: *Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen*, Mathem. Monograph. herausgegeben von Wilhelm Blascke, Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1960, pagine 112, 5 figure (senza indicazione di prezzo).

Nella importante monografia in questione vengono sviluppate per la prima volta in maniera organica la teoria e le applicazioni di quelle che l'autore chiama « serie di Lie ». Invero, nelle opere di Sophus Lie, le serie in questione erano apparse — per così dire — come ai margini dell'interesse fondamentale della ricerca scientifica di quel Matematico, ricerca piuttosto concentrata sul « Leit-motiv » rappresentato dalle « trasformazioni infinitesimali ».

Ed anche i ricercatori susseguiti a Sophus Lie non avevano indagato più da vicino sulle proprietà e sulle possibilità applicative delle serie in questione. Le interessanti proprietà delle serie stesse sono basate sul teorema di scambio (« Vertauschungssatz ») in virtù del quale il segno di funzione può essere scambiato col simbolo di serie. Una simile proprietà posseggono anche le serie di Taylor e quelle di Lagrange. Queste, infatti, possono essere considerate entro la classe delle serie di Lie, come casi particolari.

Lo stimolo a sviluppare le idee di Lie nella nuova direzione è stato suggerito al Gröbner dalla Geometria algebrica.

La monografia consta di cinque capitoli, che fanno seguito ad una introduzione.

Il primo capitolo è dedicato alla teoria generale delle serie di Lie e si articola su tre paragrafi contenenti rispettivamente la definizione e la nozione di convergenza delle serie in questione, le loro proprietà e la teoria delle serie multiple di Lie.

Nel secondo capitolo vengono prese in esame le applicazioni delle serie di Lie alla risoluzione dei sistemi di equazioni differenziali: precisamente alla risoluzione dei sistemi « autonomi », di quelli « non autonomi » ed alla risoluzione dei sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali.

Ma le serie di Lie si applicano anche alla inversione dei sistemi di funzioni, e a tale dottrina è dedicato il terzo capitolo, articolato su due paragrafi: il primo concernente l'inversione di un sistema analitico, il secondo concernente la costruzione delle caratteristiche.

Poi l'interesse della esposizione si rivolge al classico problema meccanico degli n corpi celesti. Ciò si concreta nel quarto capitolo, il quale consta di quattro paragrafi. Il primo di essi riguarda l'integrazione delle equazioni lagrangiane per un sistema di n punti materiali. Il secondo la soluzione del problema degli n corpi per mezzo delle serie di Lie. Il terzo riguarda, in particolare, il problema dei due corpi celesti ed il movimento dei pianeti. Il quarto contiene calcoli relativi alle perturbazioni, con applicazione alla determinazione delle traiettorie lunari e planetarie.

L'opera si chiude col quinto capitolo, dedicato alle applicazioni delle serie di Lie alla Geometria algebrica. Il capitolo di chiusura è, insomma, un po' dedicato all'argomento che ha fornito la spinta all'opera.

Il primo dei paragrafi di tale capitolo riguarda la rappresentazione parametrica di varietà algebriche mediante serie di Lie. Il secondo ed ultimo paragrafo riguarda gli integrali abeliani e la loro inversione.

È quasi superfluo sottolineare l'alto interesse della monografia non solo per gli analisti e i geometri algebrici, ma anche per quanto riguarda le applicazioni che interessano i fisici-matematici.

ANTONIO PIGNEDOLI

H. ARZELIÈS: *Milieux conducteurs ou polarisables en mouvement*, volume in 8 (16-25), pagine XLIV, 347, con 87 figure, anno 1959, prezzo 58 nuovi franchi, editore Gauthier-Villars, Parigi.

L'opera appartiene alla collana di studi relativistici ed è redatta in collaborazione con J. Henry. Essa consta di due parti articolate rispettivamente su quattro e su cinque capitoli, ed è completata da sei appendici, nonché preceduta da una prefazione a carattere epistemologico sul concetto di « resistenza » in Fisica.

Nel primo volume della Dinamica relativistica, dello stesso autore e che noi stessi abbiamo recensito su questo periodico, era stata sottolineata da Arzelès la struttura essenzialmente relativistica dell'elettromagnetismo, che si può dedurre, nel suo aspetto macroscopico, applicando la Dinamica relativistica alle leggi della Elettrostatica.

Ma va notato che, in quel volume, erano stati trattati soltanto i casi più semplici, cioè quelli concernenti cariche nel vuoto, mezzi a polarizzazione rigida, riferimenti galileiani.

L'opera della quale ci occupiamo ora riguarda mezzi e sistemi di riferimento qualsiasi.

E forse superfluo sottolineare la coerenza della posizione relativistica dell'Autore, per il quale sarebbe « eresia logica » il mantenere l'Elettromagnetismo nel quadro newtoniano.

Del resto, se lo sviluppo della Fisica sperimentale, da Faraday a Roentgen, è stato potentemente influenzato dalla Elettrodinamica dei corpi in movimento, la memoria fondamentale di Alberto Einstein, decretante il sorgere della teoria speciale della relatività, concerneva l'Elettrodinamica dei corpi in movimento.

La prima parte del volume di Arzelès riguarda il caso dei movimenti uniformi (mezzi isotropi in riposo rispetto ad un sistema di riferimento proprio, mezzi isotropi in movimento uniforme, conduttori in movimento uniforme nel vuoto, mezzi paraelettrici e paramagnetici in movimento uniforme nel vuoto). In tale prima parte l'Autore si serve dei metodi della teoria della relatività speciale.

La seconda parte del volume si riferisce invece a movimenti qualunque e l'Autore vi sottolinea la necessità della applicazione della teoria della relatività generale. In tale seconda parte la trattazione investe l'Elettromagnetismo in un campo gravitazionale (equazioni del vuoto in un riferimento qualunque, mezzi materiali in riposo in un sistema di riferimento qualsiasi sistema di riferimento ruotante, magneti sferici permanenti in rotazione uniforme, magneti cilindrici permanenti in rotazione uniforme).

L'opera presenta carattere di indubbia chiarezza nella elevatezza della esposizione ed a tale chiarezza giovano gli opportuni richiami e le appendici a carattere matematico. Molto ampia ed esauriente la bibliografia.

ANTONIO PIGNEDOLI

E. LUKACS: *Characteristic functions*, pp. 216; C. Griffin e C., London 1960; 38 s.

In questa monografia dedicata, come dichiara l'A., agli studenti iscritti ai corsi universitari di calcolo delle probabilità e di statistica matematica, sono raccolti i principali teoremi della teoria delle funzioni caratteristiche; della maggior parte di tali teoremi sono date le relative dimostrazioni e per i rimanenti sono fornite le necessarie indicazioni bibliografiche.

La materia è suddivisa in nove capitoli; nei primi quattro sono esposte le nozioni fondamentali della teoria.

Introdotte le così dette funzioni di distribuzione $F(x)$, definite in $(-\infty, \infty)$, non decrescenti, continue a destra, $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$, e le corrispondenti funzioni caratteristiche $f(t)$:

$$(*) \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) \quad (-\infty < t < +\infty),$$

l'A. pone subito in risalto la decomposizione canonica di Lebesgue di $f(t)$.

Seguono il teorema di inversione della (*), il teorema di composizione e alcuni teoremi di passaggio al limite.

Si hanno poi i criteri necessari e sufficienti di S. Bochner, H. Cramer, A. Y. Khincine perchè una funzione $f(t)$ assegnata sia una funzione caratteristica, e un particolare criterio di G. Polva.

Il capitolo V è dedicato alle funzioni caratteristiche $f(t)$ tali che ad ogni intero $n > 0$ corrisponda una funzione caratteristica $f_n(t)$ tale che $f_n(t) = [f(t)]^{1/n}$, o come si dice alle funzioni caratteristiche infinitamente divisibili. Vi si notano un teorema costruttivo di B. de Finetti, le rappresentazioni canoniche di P. Levy, A. Y. Khincine, A. N. Kolmogorof e lo studio delle funzioni caratteristiche delle funzioni di distribuzione stabili.

Nel capitolo VI sono esposti alcuni teoremi generali di A. Y. Khincine e H. Cramer sulla decomposizione delle funzioni caratteristiche in prodotto di funzioni caratteristiche.

I capitoli VII e VIII, i più estesi e i più moderni della monografia, contengono un'analisi aggiornata delle funzioni caratteristiche che risultano analitiche in un intorno dell'origine o più in particolare funzioni intere.

Nel capitolo X sono studiate alcune speciali trasformazioni integrali che operando su una funzione caratteristica assegnata, permettono di costruire nuove funzioni caratteristiche.

Seguono l'indice bibliografico e quello della materia.

La monografia è ricca di contenuto e redatta in maniera perspicua; opportuni chiarimenti intercalati nel testo ne facilitano la lettura sia ai cultori di matematica pura che a quelli di matematica applicata, cosicchè l'opera dell'A. è da giudicarsi degna di elogio.

GIOVANNI SANSONE

R. ZURMÜHL: *Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker*, III Ed. Berlin usw., Springer-Verlag, 1961; XV + 548 pp., DM. 29, 40.

È una nuova edizione rimaneggiata (per circa il 40 %) ed accresciuta (di circa 25 pp.) del ben noto trattato di Analisi numerica dell'A., la cui II Ed. (del 1957) è recensita a p. 593 del vol. 13 (1958) di questo *Bollettino*.

Il principale concetto informatore del rimaneggiamento è stato quello di dare maggior rilievo ai metodi, soprattutto iterativi, che, con l'avvento delle macchine calcolatrici « a programma », hanno recentemente assunto maggiore importanza. Tuttavia il libro, nel suo complesso, continua ad essere destinato prevalentemente ai calcolatori facenti uso di macchine « da tavolo ».

Le innovazioni più notevoli riguardano il calcolo degli autovalori — per cui viene posto in primo piano il metodo di Rayleigh, mentre si rimanda all'opera dello stesso A. sulle *Matrici* per quello di Hessenberg — e il capitolo sulla statistica e la compensazione degli errori.

Permane il lieve inconveniente di un certo contrasto tra la terminologia adottata per gli « autovalori » di una matrice (che potrebbero meglio dirsi *moltiplicatori*) e quelli delle equazioni differenziali.

F. G. TRICOMI

PROVISIONAL INTERN. COMPUTATION CENTRE: *Proceedings of the Symposium on the Numerical Treatment of Ordinary Differential Equations, Integral and Integro-Differential Equations*, (Rome, 20-24 Sept. 1960). Basel, Birkhäuser, 1960; 679 pp. litogr.

Questo grosso volume contiene — oltre ad informazioni generali sul Simposio, a cui parteciparono circa 200 persone — i testi delle tre conferenze generali tenute in esso, e delle 54 comunicazioni, di tre delle quali figurano però solo dei riassunti.

Le tre conferenze generali furono le seguenti:

- 1) A. WALTHER - B. DEJON, *General Report on the Numerical Treatment of Integral and Integro-Differential Equations*.
- 2) F. GENUYS, *Rapport général sur le traitement numérique des équations différentielles*.
- 3) R. COURANT, *General Problems Confronting Computing Centers*.

Sarebbe troppo lungo qui riportare i titoli delle 54 comunicazioni e i nomi dei loro autori. Ci limiteremo perciò ad osservare che esse concernono i più svariati problemi dell'Analisi numerica, con una certa prevalenza dei metodi iterativi, che tanta importanza hanno assunta in quest'epoca di macchine calcolatrici elettroniche.

Non manca neppure, anzi il volume si apre con essa, una comunicazione (di P. Lesky) sul modernissimo problema del movimento di una nave spaziale, sotto l'azione simultanea del Sole, della Terra e della Luna.

F. G. TRICOMI

P. MEDGYSSY: *Decomposition of Superpositions of Distribution Functions*, Publ. House Hungarian Acad. Sci., Budapest, 1961; 227 pp.

Si tratta di una monografia sull'importante problema della decomposizione (ove possibile) in componenti « semplici », p. es. in curve gaussiane, di una curva di distribuzione statistica data empiricamente, cioè risultante da misure, rilievi o simili.

Si tratta di un problema di grande importanza in molte applicazioni (statistica, spettroscopia, ecc.) di cui anche chi scrive si occupò in passato [Annales Inst. H. Poincaré, 8, 111-149 (1938)], ma che, purtroppo, non soddisfa alla terza condizione posta da Hadamard acciocchè un problema possa dirsi « ben posto »; e cioè che una piccola variazione dei dati implichi una piccola variazione dei risultati.

A prescindere da questa obiezione di fondo, il libro può essere utile a chi s'imbatta nel problema accennato, anche perchè gli fornirà informazioni su pubblicazioni ungheresi e altre non facilmente reperibili in Occi-

dente. Non si tratta però di un libro di facile lettura, chè p. es. (a p. 28) l'operazione di moltiplicazione di una certa funzione per l'esponenziale $e^{\lambda u^2}$, è magniloquentemente espressa dicendo che si applica alla funzione lo speciale operatore lineare L^λ !

Il principale metodo con cui l'A. cerca di risolvere il problema di decomposizione è — nel caso che le componenti semplici siano gaussiane — quello, ben noto, di moltiplicare la trasformata di Fourier della data funzione per opportuni esponenziali del tipo precedente. Qui però si considera anche il caso in cui le componenti « semplici » non siano gaussiane, e si sviluppano anche altri metodi accanto al principale.

Fra le varie questioni marginali trattate, è particolarmente interessante lo studio, iniziato da Paul Levy, delle distribuzioni *stabili*, cioè che conservano la stessa forma quando si addizionano le corrispondenti variabili casuali.

F. G. TRICOMI

B. V. GNEDENKO - A. YA. KHINCHIN: *An Elementary Introduction to the Theory of Probability*. (Trad. dal russo di W. R. STAHL sotto la supervisione di J. B. ROBERTS). San Francisco, Freeman & Co., 1961; 144 pp.; \$ 1,75.

Quest'elementarissima ma corretta introduzione alla teoria delle probabilità, è una traduzione della 4ª Ed. (1957) della pregevole operetta divulgativa dei due ben noti AA. russi. Essa è altamente raccomandabile a chiunque voglia farsi una sana idea dei fondamenti del calcolo delle probabilità, pur avendo soltanto una rudimentale cultura matematica: poco più di una certa consuetudine al calcolo letterale. Tuttavia il lettore viene condotto sino al concetto di variabile casuale, alla legge dei grandi numeri, ecc..

L'ultimo paragrafo contiene un rapido sguardo storico alla teoria, non del tutto libero dall'abituale unilateralità di consimili sguardi storici di autori sovietici.

F. G. TRICOMI

N. W. SMIRNOV (Editore), *Tables for the Distribution and Density Functions of t-Distribution (« Student's » Distribution)*. (Trad. dal russo di P. BASU) Pergamon Press, Oxford etc., 1961; 129 pp.; 80 s.

Raccolta di tavole numeriche a sei decimali, della funzione

$$S_\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{\Gamma(\nu/2 + 1/2)}{\Gamma(\nu/2)} \int_{-\infty}^t \left(1 + \frac{u^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} du$$

e della sua derivata $s_\nu(t)$ rispetto a t , cioè della cosiddetta *Student's distribution*, che ha notevoli applicazioni nella statistica matematica.

Nella I tavola, che è la maggiore, sono dati i valori di $S_v(t)$ e $s_v(t)$ per t compreso tra 0 e 6,50 e $v = 1, 2, 3, \dots, 24$; con passo in t variabile da 0,01 a 0,05. La breve tav. II fornisce i valori di $S_v(t)$ per $t = 6,5(0,1)9,0$ e $v = 1, 2, \dots, 10$, e la tav. III per t compreso fra 0 e 5 (con passo variabile da 0,01 a 0,05) e $v = 25, 26, \dots, 35$. Infine la tav. IV fornisce i valori di $S_v(t)$ per gli stessi valori di t della tav. III ma $v \geq 33, 33 \dots$, con l'avvertenza che, invece di v , il secondo argomento è qui

$$= \frac{1000}{v}.$$

Giova all'uopo osservare che, al limite per $\xi \rightarrow 0$ (cioè per $v \rightarrow \infty$) la Student's distribution si riduce alla distribuzione gaussiana.

Vi sono inoltre alcune tavole ausiliarie.

In quasi tutte le tavole è possibile avere 5 decimali esatti con la semplice interpolazione lineare.

Nell'intestazione delle tavole ho notato qualche errore di stampa.

F. G. TRICOMI

M. HUKUHARA - T. KIMURA - T. MATURA: *Equations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe*, Math. Soc. of Japan, Tokio, 1961; 155 pp.

Il volumetto è dedicato allo studio, nel campo analitico, degli integrali dell'equazione differenziale $y' = R(x, y)$, dove $R(x, y)$ denota una funzione razionale dei due argomenti, nell'intorno di un suo punto singolare: un problema più che classico, iniziatosi con le famose ricerche di Briot e Bouquet della metà del secolo scorso.

Supposto che il punto singolare sia stato trasportato nell'origine, gli AA. riducono lo studio a quello di sei equazioni tipiche, e cioè:

$$\begin{array}{ll} (A) \quad xy' = f(x, y), & (D) \quad xy' = y F(x, y, x^\rho/y), \\ (B) \quad x^{\sigma+1} y' = f(x, y), & (E) \quad xy^\kappa y' = F(x, y, x^\rho/y), \\ (C) \quad x^{\sigma+1} y^\nu y' = f(x, y), & (F) \quad x^{\sigma+1} y' = y^\kappa F(x, y, x^\rho/y), \end{array}$$

dove f ed F denotano funzioni olomorfe (nell'intorno dell'origine) dei loro argomenti, e $\rho, \sigma, \nu, \kappa$ certi numeri interi, dei quali i primi tre non possono essere mai negativi.

Nel volumetto in esame s'indaga, fra l'altro, sotto quali condizioni le serie di potenze che soddisfano formalmente a queste equazioni, convergono o almeno rappresentano asintoticamente qualche soluzione. Inoltre viene rivolta particolare attenzione alla questione se, nell'intorno di un punto di singolarità essenziale di una soluzione, debbano necessariamente esistere punti critici mobili. Vien mostrato che, quando non si escludono soluzioni polidrome con infiniti rami, essi possono mancare anche nel caso di equazioni diverse da quella di Riccati.

Nell'ultimo capitoletto viene particolarmente considerato il caso di x reale.

F. G. TRICOMI