BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ROMULUS CRISTESCU

Il metodo delle approssimazioni successive nei gruppi ordinati.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **16** (1961), n.1, p. 39–43.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1961_3_16_1_39_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1961.

Il metodo delle approssimazioni successive nei gruppi ordinati.

Nota di ROMULUS CRISTESCU (a Bucarest) (*)

Sunto. - *Si estende il metodo delle approssimazioni successive nei gruppi ordinati, nei quali ogni successione maggiorata ammette un estremo superiore, ma che non sono supposti d'essere dei gruppi reticolati* (1).

Summary. - *In this Note is extended the method of successive aproximations for operatorial equations in some (partially) ordered groups.*

Sia G un gruppo ordinato, cioè un gruppo abeliano nel quale è definita una relazione d'ordine (parziale), tale che se $x \leq y$ allora $a + x \leq a + y$ qualunque sia $a \in G$. Supponiamo che G abbia anche la seguente proprietà:

Se una successione $\{ y_n \}$ di elementi di G è maggiorata (2), allora esiste $\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} y_n$,
insieme alla proprietà duale che ne risulta.

Se una successione $\{ y_n \}$ di elementi del gruppo G converge ad y rispetto all'ordine di G, scriveremo $y_n \xrightarrow{o} y$ oppure $y = (o) - \lim y_n$.

Siano ora T, U e V tre operatori definiti in G e a valori in G, precisamente: T definito su $[a, b]$, U su $[a, c]$ e V su $[b, c]$,

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 2 febbraio 1961.

(1) Per il metodo delle approssimazioni successive nei reticoli lineari completi o negli spazi a norma vettoriale, vedersi: L. V. KANTOROVICH, *The Method of Successive Aproximations for Functional Equations*, « Acta Math. », 71 (1939), 63-97.

(2) Una successione $\{ y_n \}$ di elementi del G è maggiorata se esiste un elmento $y \in G$ tale che $y_n \leq y$ qualunque sia n. L'estremo superiore degli elementi $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ sarà notato con $\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

Se $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots$ e se $x = \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, allora scriveremo $x_n \uparrow x$. La notazione $z_n \downarrow z$ ha poi un significato evidente. Una successione $\{ y_n \}$ converge ad y rispetto all'ordine, se esistono le successioni $\{ x_n \}$, $\{ z_n \}$ tali che $x_n \uparrow y$, $z_n \downarrow y$ e che $x_n \leq y_n \leq z_n$.

dove a, b, c sono tre elementi di G tali che $a < b < c$. Diremo che U *è limitato dalla coppia* $\{T, V\}$ se le seguenti due condizioni sono valevoli:

1° $T(b) \leq U(b) \leq V(b)$

2° $T(x+h) - T(x) \leq U(y+k) - U(y) \leq V(z+l) - V(z)$ se $x \leq y \leq z$ e $h \leq k \leq l$ (e se $x, x+h \in [a, b]$ e $z, z+l \in [b, c]$).

In questa nota, sono considerate delle equazioni della forma

$$s = W(s)$$

dove W è un operatore definito in G. Si dirà che una soluzione s^* può essere ottenuta con il metodo delle approssimazioni successive a partire da un elemento $p \in G$, se

$$s^* = (o) - \lim s_n$$

dove la successione $s_0, s_1, s_2, \ldots$ è definita dalla relazione ricorrente

$$s_{n+1} = W(s_n), \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

con $s_0 = p$.

Gli elementi s_n appartengono, beninteso, al dominio dell'operatore W.

Porremo $s^* = s^*(p)$.

TEOREMA I. - *Sia* T *un operatore definito su* [a, b] *e* V *un operatore definito su* [b, c] *tali che le equazioni*

$$x = T(x), \quad z = V(z)$$

ammettono rispettivamente le soluzioni $x^* = x^*(b) \in [a, b]$ *e* $z^* = z^*(b) \in [b, c]$. *Se* U *è un operatore definito su* [a, c] *e limitato dalla* $\{T, V\}$, *allora l'equazione*

$$y = U(y) \tag{1}$$

ammette la soluzione $y^* = y^*(b) \in [a, c]$, *e tale soluzione verifica le disguaglianze*

$$x^* \leq y^* \leq z^*.$$

DIMOSTRAZIONE. - Sia $y_0 = b$ e

$$y_{n+1} = U(y_n), \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

Possiamo dimostrare che per ogni u si ha $y_n \in [a, c]$ e, che la successione $\{ y_n \}$, (o) converge ad una soluzione dell'equazione (1).

Infatti, sia anche

$$x_{n+1} = T(x_n), \; z_{n+1} = V(z_n), \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

dove $x_0 = z_0 = b$. Si verifica per induzione che per ogni k e $l > k$ si ha

(2) $$x_l - x_k \leq y_l - y_k \leq z_l - z_k,$$

e in particolare, qualunque sia n

(3) $$a \leq x_n \leq y_n \leq z_n \leq c.$$

Per l'ipotesi si ha

$$x_n \xrightarrow{o} x^*, \qquad z_n \xrightarrow{o} z^*$$

cosicchè dalle disuguaglianze (2) risulta la convergenza della successione $\{ y_n \}$. Sia $y_n \xrightarrow{o} y^*$. Dalle (3) segue allora

$$a \leq x^* \leq y^* \leq z^* \leq c.$$

D'altra parte, dalle (2) risultano le disuguaglianze

$$x^* - x_n \leq y^* - y_n \leq z^* - z_n$$

e come U è limitata dalla $\{ T, V \}$ si ha

$$T(x^*) - T(x_n) \leq U(y^*) - U(y_n) \leq V(z^*) - V(z_n).$$

Risulta dunque $y_{n+1} \xrightarrow{o} U(y^*)$ e come $y_{n+1} \xrightarrow{o} y^*$ si ha infine

$$y^* = U(y^*);$$

il teorema è dunque dimostrato.

TEOREMA II. – *Supponiamo che le condizioni del teorema* 1 *siano valevoli e che*

(i) *esistano le soluzioni* x* (a) *e* x* (b), *e* x* (a) = x* (b);

(ii) *esistano le soluzioni* z* (b) *e* z* (c), *e* z* (b) = z* (c).

In questo caso, l'equazione (I) *ammette una soluzione unica in* [a, c], *e questa soluzione può essere ottenuta con il metodo delle approssimazioni successive partendo da un elemento qualunque* $y'_0 \in [a, c]$.

DIMOSTRAZIONE. – Infatti, sia

$$x' = a \leq y'_0 \leq c = z'_0$$

e poniamo

$$x'_{n+1} = T(x'_n),\ y'_{n+1} = U(y'_n).\ z'_{n+1} = V(z'_n).$$

Utilizzando anche le notazioni del teorema 1, si può scrivere

$$x'_n - x_n \leq y'_n - y_n \leq z'_n - z_n.$$

Queste disuguaglianze possono essere verificate per induzione.

Poichè $x'_n - x_n \xrightarrow{o} \mathbf{0}$ e $y'_n - y_n \xrightarrow{o} \mathbf{0}$, risulta che $y'_n - y_n \xrightarrow{o} \mathbf{0}$, dunque $y'_n \xrightarrow{o} y^*$. Se, in particolare, si ha $y'_0 = U(y'_0)$, allora $y'_n = y'_0$ qualunque sia n, e dunque $y^* = y'_0$; il teorema è così dimostrato.

TEOREMA III. – *Sia* H = [e, f] ⊂ G *e sia* W *un operatore definito su* H *e a valori in* H. *Se* W *è monotono e* (o)-*continuo* [3] *allora l'equazione*

$$s = W(s) \tag{4}$$

ammette le soluzioni s* (e) *e* s* (f) *per le quali si ha* $s^*(e) \leq s^*(f)$.

Infatti ponendo

$$s_0 = e, \qquad s_{n+1} = W(s_n), \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

[3] L'operatore W è monotono se dalla $s' \leq s''$ risulta $W(s') \leq W(s'')$. In questo caso la continuità di W si riduce alla proprietà: se $s_n \downarrow s$ allora $W(s_n) \downarrow W(s)$ e se $s_n \downarrow s$ allora $(s_n) \downarrow W(s)$.

risulta

$$e \leq s_0 \leq s_1 \dots \leq s_n \leq f.$$

Esiste dunque

$$s' = (o) - \lim s_n .$$

Poichè T è (o)-continuo, l'elemento s' è evidentemente una soluzione della (4).

Le altre affermazioni del teorema, si verificano con la stessa facilità.

Dai teoremi 1, 2, 3 ne risulta il

TEOREMA IV. - *Sia* U *un operatore definito su* $\mathrm{B} = [\mathrm{a}, \mathrm{c}] \subset \mathrm{G}$ *e limitato dagli operatori* T, V *definiti rispettivamente su* $\mathrm{A} = [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ *e* $\mathrm{C} = [\mathrm{b}, \mathrm{c}]$.

Se T *e* V *sono a valori in* A *e* C *rispettivamente e se essi sono monotoni e* (o)*-continui, allora l'equazione*

$$y = U(y) \tag{5}$$

ammette la soluzione $\mathrm{y}^* = \mathrm{y}^*(\mathrm{b})$ *limitata come segue*

$$a \leq x^*(b) \leq y^* \leq z^*(b) \leq c.$$

Se valgono anche le uguaglianze $\mathrm{x}^*(\mathrm{a}) = \mathrm{x}^*(\mathrm{b})$ *e* $\mathrm{z}^*(\mathrm{b}) = \mathrm{z}^*(\mathrm{c})$, *allora l'equazione* (5) *ammette una sola soluzione in* B *e questa soluzione può ottenersi con il metodo delle approssimazioni successive partendo da un elemento qualunque* $\mathrm{y}'_0 \in \mathrm{B}$.

OSSERVAZIONE. - Se nella definizione dell'operatore limitato, poniamo $a = -c$, $b = \mathbf{0}$, $T(x) = -V(-x)$ e $x = -z$, $h = -e$, allora diciamo che *U è maggiorato dal V.*

I teoremi dimostrati, restano valevoli, se si sostituisce la condizione « U è limitato dalla $\{T, V\}$,» con la condizione « U è maggiorato dal V ».