
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ANTONIO PIGNEDOLI

Sul moto centrale di un punto-massa veloce. Nota II.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 16
(1961), n.1, p. 1–18.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1961_3_16_1_1_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Sul moto centrale di un punto-massa veloce.

Nota II di ANTONIO PIGNEDOLI (a Bologna) (*)

Sunto. - La nota completa ed integra una nota precedente preliminarmente pubblicata dall'autore sullo stesso argomento in questo stesso giornale. Si confrontano, anzitutto, i risultati che si ottengono ordinariamente in una impostazione relativistico-ristretta del problema del moto centrale di un punto-massa veloce con quelli che si ottengono nella impostazione relativistica proposta dall'Autore. (Il problema è sempre affrontato nello schema deterministico, cioè non meccanico-quantistico). Si considerano in particolare il caso delle forze newtoniane ed il relativo problema dello spostamento del perielio.

Si stabilisce poi in generale per quali n interi energie potenziali della forma $V(r) = ar^n$, (con a costante) forniscano, in dinamica relativistica, per la determinazione della traiettoria, integrali elementari, ellittici od iperellittici, e ciò in una considerazione che contiene in particolare i casi di interesse fisico. Indi si studia, sempre nello schema non quantistico, il problema del moto di una particella puntuale veloce in un « campo mesonico scalare », interessante, come si sa, la teoria delle forze nucleari. In seconda approssimazione, la determinazione della traiettoria è ridotta a quadrature ellittiche.

Si studia, infine, il problema del moto di una particella puntuale soggetta all'azione di una forza centrale di modulo $\varphi(\theta)/r^2$.

1. Questa nota ha lo scopo di fare seguire alcuni complementi ad un'altra già da me pubblicata preliminarmente sullo stesso argomento ⁽¹⁾. Può essere, anzitutto, interessante un confronto fra i risultati che si ottengono ordinariamente in una impostazione relativistica ristretta del problema del moto centrale di un punto-massa veloce e quelli che si ottengono secondo la impostazione fatta nella mia citata nota.

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 15 gennaio 1961.

⁽¹⁾ Cfr. A. PIGNEDOLI, *Sul moto centrale di un punto-massa veloce*, « Boll. U. M. I. », (3), vol. 13, 1958.

Detti rispettivamente τ il « tempo proprio », m_0 la « massa a riposo » della particella puntuale considerata ed O , al solito, il centro della forza sollecitante, l'equazione del moto della particella stessa si scrive ordinariamente: ⁽²⁾

$$(1) \quad \frac{d}{d\tau} \left[m_0 \frac{d(P-O)}{d\tau} \right] = -m_0 F(r) \frac{P-O}{r}, \quad (r = \text{mod } (P-O)),$$

dove è chiaro il significato dei simboli. In coordinate polari di polo O , ne discende immediatamente l'integrale primo del momento della quantità di moto:

$$(2) \quad r^2 \frac{d\theta}{d\tau} = r^2 \frac{d\theta}{dt} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = r^2 \frac{d\theta}{dt} \left(1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \Omega = \text{costante},$$

con $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$, $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$, c = velocità critica.

Se, essendo $m_0 F(r)$ la componente della « forza di MINKOWSKI » agente sulla particella, si pone $m_0 F(r) = \frac{d\Phi(r)}{dr}$, l'equazione differenziale (1) diventa:

$$m_0 \frac{d^2(P-O)}{d\tau^2} = - \frac{d\Phi(r)}{dr} \cdot \frac{P-O}{r}.$$

Moltiplicando ambo i membri di quest'ultima scalarmente per $\frac{d(P-O)}{d\tau}$, si ottiene:

$$m_0 \frac{d^2(P-O)}{d\tau^2} \times \frac{d(P-O)}{d\tau} = - \frac{d\Phi(r)}{dr} \cdot \frac{P-O}{r} \times \frac{d(P-O)}{d\tau},$$

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{1}{2} m_0 \left[\frac{d(P-O)}{d\tau} \right]^2 \right\} = - \frac{d\Phi(r)}{dr} \cdot \frac{dr}{d\tau} = - \frac{d\Phi(r)}{d\tau};$$

quindi l'integrale:

$$(I) \quad \frac{1}{2} m_0 \left[\frac{d(P-O)}{d\tau} \right]^2 + \Phi(r) = \text{costante},$$

cioè

$$(I') \quad \frac{1}{2} m_0 \left[\frac{d(P-O)}{dt} \right]^2 \frac{1}{1 - v^2/c^2} + \Phi(r) = \text{costante},$$

⁽²⁾ vedi, per es.: G. STEPHENSON e C. W. KILMISTER, *Special relativity for Physicists*, Longmans, London, 1958, pag. 65.

cioè, infine, l'integrale:

$$(I'') \quad \frac{1}{2} \frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \Phi(r) = \text{costante}.$$

Se si pone, invece, $m_0 F = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d\Phi(r)}{dr}$, dalla (1) si ha:

$$m_0 \frac{d^2(P-O)}{d\tau^2} = - \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{d\Phi(r)}{dr} \cdot \frac{P-O}{r},$$

da cui

$$m_0 \frac{d^2(P-O)}{d\tau^2} \times \frac{d(P-O)}{d\tau} = - \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{d\Phi}{dr} \frac{P-O}{r} \times \frac{d(P-O)}{d\tau},$$

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{1}{2} m_0 \left[\frac{d(P-O)}{d\tau} \right]^2 \right\} = - \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot \frac{d\Phi}{d\tau},$$

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{1}{2} m_0 \frac{v^2}{1-v^2/c^2} \right\} + \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{d\Phi}{d\tau} = 0,$$

$$d \left\{ \frac{1}{2} m_0 \frac{v^2}{1-v^2/c^2} \right\} \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}} + d\Phi = 0$$

$$d \left\{ \frac{1}{2} m_0 c^2 \left(\frac{1}{1-v^2/c^2} - 1 \right) \right\} \cdot \sqrt{1-v^2/c^2} + d\Phi = 0,$$

$$\frac{1}{2} m_0 c^2 \sqrt{1-v^2/c^2} \cdot d \left(\frac{1}{1-v^2/c^2} \right) + d\Phi = 0,$$

$$m_0 c^2 d \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) + d\Phi = 0,$$

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \Phi = E \quad (= \text{costante}),$$

cioè, infine, l'integrale relativistico dell'energia

$$(II) \quad mc^2 + \Phi(r) = E \quad (= \text{costante}),$$

dove $\Phi(r)$ è l'energia potenziale della particella ed m , al solito, la massa maupertuisiana della particella stessa.

Uguagliando poi la forza radiale al prodotto della massa a riposo per la componente radiale della accelerazione calcolata rispetto al tempo proprio τ e tenendo conto dell'integrale primo del momento della quantità di moto (2), si ricava l'equazione differenziale della traiettoria:

$$(3) \quad \left(\frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) \Omega^2 = F(r).$$

Ora, dall'integrale relativistico (II) discende:

$$(4) \quad m/m_0 = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} = [E - \Phi(r)]/m_0 c^2,$$

quindi l'equazione differenziale della traiettoria della particella risulta:

$$(5) \quad \frac{m_0 \Omega^2}{r^2} \left(\frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) = \frac{E - \Phi(r)}{m_0 c^2} \frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{d\Phi_1(r)}{dr},$$

$$\left[\Phi_1 = \frac{-(E - \Phi)^2}{2m_0 c^2} \right].$$

Da ciò discende che la traiettoria relativistica è la stessa che si avrebbe nel caso classico sotto l'azione di una forza conservativa dipendente dalla energia potenziale $\Phi_1(r)$ e, naturalmente, con un tempo impiegato a descrivere l'orbita differente dal tempo impiegato nel caso centrale classico. Se, in particolare, la forza è newtoniana, detta M_0 la massa del centro attraente ed f la costante della forza attrattiva, sostituendo nella (5) $\Phi(r) = -\frac{f m_0 M_0}{r}$, si ottiene l'equazione differenziale:

$$(6) \quad \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} + \left(1 - \frac{f^2 M_0^2}{c^2 \Omega^2} \right) \frac{1}{r} = \frac{f M_0 E}{m \Omega^2},$$

che fornisce la soluzione generale:

$$(7) \quad \frac{1}{r} = A_0 \cos \left[\sqrt{1 - \frac{f^2 M_0^2}{c^2 \Omega^2}} \theta + \alpha \right] + \frac{f M_0 E}{m_0 c^2 \Omega^2 (1 - f^2 M_0^2 / c^2 \Omega^2)},$$

con A_0 ed α costanti di integrazione. La traiettoria « a rosetta » rappresentata dalla (7) presenta una precessione apsidale data per ogni rivoluzione da:

$$(8) \quad 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{f^2 M_0^2}{c^2 \Omega^2}}} - 1 \right) \approx \frac{\pi f^2 M_0^2}{c^2 \Omega^2},$$

mentre, come si sa, la vera precessione, in accordo con la teoria della relatività generale, è circa sei volte più grande. (È quasi superfluo ricordare che la teoria relativistica del moto di una particella puntuale in un campo di forza centrale ha ottenuto, in una classica memoria di SOMMERFELD ⁽³⁾, il successo rappresentato dalla spiegazione della struttura fina dello spettro dell'atomo di idrogeno nella impostazione meccanico-quantistica di BOHR-SOMMERFELD).

Nella impostazione secondo la quale io mi sono già occupato del problema del moto centrale di una particella veloce, l'equazione differenziale del moto stesso diventa, in generale:

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \left[m \frac{d(P-0)}{dt} \right] = - \frac{dV(r)}{dr} \cdot \frac{(P-0)}{r},$$

dove t è il tempo ordinario, m la massa maupertuisiana della particella mobile e $V(r)$ l'energia potenziale da cui dipende la forza centrale in questione. Si hanno l'integrale relativistico del momento della quantità di moto

$$(10) \quad mr^2\dot{\theta} = \frac{m_0 r^2 \dot{\theta}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}{c^2}}} = A \quad (= \text{costante})$$

⁽³⁾ Cfr. A. SOMMERFELD, « Annalen der Physik », 51, I, 1916.

e l'integrale relativistico dell'energia:

$$(11) \quad mc^2 + V(r) = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}{c^2}}} + V(r) = E \quad (= \text{costante})$$

che si può scrivere:

$$(11') \quad v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = c^2 [1 - m_0^2 c^4 (E - V(r))^{-2}].$$

Eliminando la massa maupertuisiana m tra l'integrale del momento della quantità di moto e quello soprascritto dell'energia, si ottiene la:

$$(12) \quad r^2 \dot{\theta} = A c^2 [E - V(r)]^{-1}.$$

Infine, eliminando il tempo dalla (11') per mezzo della (12), si ricava l'equazione differenziale relativistica della traiettoria:

$$(13) \quad \left(\frac{d \frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{A^2 c^2} [(E - V(r))^2 - m_0^2 c^4].$$

Da questa, separando le variabili, si ottiene:

$$d\theta = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{\pm \sqrt{\frac{1}{A^2 c^2} [(E - V(r))^2 - m_0^2 c^4] - \frac{1}{r^2}}}$$

da cui, integrando, si ha:

$$(14) \quad \theta - \theta_0 = \int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{\pm \sqrt{\frac{1}{A^2 c^2} [(E - V(r))^2 - m_0^2 c^4] - \frac{1}{r^2}}}.$$

Dopo ciò, dalla (12) si ricava:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{A c^2}{r^2 [E - V(r)]},$$

quindi:

$$(15) \quad t - t_0 = \frac{1}{Ac^2} \int \frac{r^2 [E - V(r)] d\left(\frac{1}{r}\right)}{\pm \sqrt{\frac{1}{A^2 c^2} [(E - V(r))^2 - m_0^2 c^4] - \frac{1}{r^2}}}.$$

Nel caso newtoniano ho fatto vedere come si possa assumere quale equazione differenziale vettoriale indefinita relativistica del moto della particella puntuale planetaria considerata la seguente:

$$(16) \quad \frac{d}{dt} \left[m \frac{d(P - O)}{dt} \right] = - f m_0 \frac{M_0 + m_0}{r^2} \cdot \frac{(P - O)}{r},$$

la quale, per $\frac{v}{c} \rightarrow 0$, si riduce all'equazione classica:

$$(17) \quad \frac{d^2(P - O)}{dt^2} = - f \frac{m_0 + M_0}{r^2} \cdot \frac{(P - O)}{r}.$$

E, posto $\mu_0 = f m_0 (m_0 + M_0)$, quindi $V(r) = -\mu_0/r$, l'equazione differenziale relativistica della traiettoria (16) diventa:

$$(18) \quad \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{A^2 c^2} \left[\left(\frac{\mu_0}{r} + E \right)^2 - m_0^2 c^4 \right],$$

che fornisce:

$$(19) \quad \frac{1}{r} = - \frac{E \mu_0}{\mu_0^2 - A^2 c^2} \left[1 + \frac{Ac}{\mu_0} \sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^4 (1 - \mu_0^2 / A^2 c^2)}{E^2}} \cos \sqrt{1 - \frac{\mu_0^2}{A^2 c^2}} (\theta - \theta_0) \right]$$

cioè per la traiettoria, « a rosetta », una precessione perielica per ogni rivoluzione data da:

$$(20) \quad 2\pi \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \mu_0^2 / A^2 c^2}} - 1 \right] \approx \frac{\pi \mu_0^2}{A^2 c^2} = \frac{\pi^2 f^2 m_0^2 (m_0 + M_0)^2}{A^2 c^2},$$

risultato questo che migliora quello ordinariamente ottenuto in relatività ristretta.

2. Possiamo ora chiederci in generale (i casi di interesse fisico rientreranno come casi particolari) quali siano gli interi n tali che, considerata una energia potenziale della forma $V(r) = ar^n$, con a costante, forniscano, per la determinazione della traiettoria, integrali elementari, ellittici od iperellittici. Si avrà, in generale:

$$\begin{aligned}
 (22) \quad \theta - \theta_0 &= \mp \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{r^4}{A^2 c^2} [(E - ar^n)^2 - m_0^2 c^4] - r^2}} \\
 &= \mp Ac \int \frac{dr}{\sqrt{a^2 r^{2n+4} - 2Ear^{n+4} + (E^2 - m_0^2 c^4)r^4 - A^2 c^2 r^2}} \\
 &= \mp Ac \int \frac{dr}{r \sqrt{a^2 r^{2n+2} - 2Ear^{n+2} + (E^2 - m_0^2 c^4)r^2 - A^2 c^2}}.
 \end{aligned}$$

Per $n=0$, si ha, in particolare:

$$(23) \quad \theta - \theta_0 = \mp Ac \int \frac{dr}{r \sqrt{(a^2 - 2Ea + E^2 - m_0^2 c^4)r^2 - A^2 c^2}},$$

cioè un integrale elementare.

Prendiamo ora in esame il variare di n per numeri interi positivi.

Per $n=1$, si ha:

$$(24) \quad \theta - \theta_0 = \mp Ac \int \frac{dr}{r \sqrt{a^2 r^4 - 2Ear^3 + (E^2 - m_0^2 c^4)r^2 - A^2 c^2}},$$

cioè un integrale ellittico.

Per $n = 2$, si ha:

$$(25) \quad \theta - \theta_0 = \mp Ac \int \frac{dr}{r \sqrt{a^2 r^6 - 2Ear^4 + (E^2 - m_0^2 c^4)r^2 - A^2 c^2}} =$$

$$= \mp Ac \int \frac{d(r^2)}{2r^2 \sqrt{a^2 (r^2)^3 - 2Ea(r^2)^2 + (E^2 - m_0^2 c^4)r^2 - A^2 c^2}},$$

cioè un integrale ellittico nella variabile r^2 .

Per $n = 3$ risulta invece un integrale iperellittico in r . Si ha, infatti, in tale caso:

$$(26) \quad \theta - \theta_0 = \mp Ac \int \frac{dr}{r \sqrt{a^2 r^8 - 2Ear^5 + (E^2 - m_0^2 c^4)r^2 - A^2 c^2}}.$$

Così si hanno pure integrali iperellittici per $n = 4$ e per $n = 5$.

Passiamo ora a prendere in esame valori interi negativi dell'esponente n .

Per $n = -1$, si ha il già considerato caso del potenziale newtoniano.

Per $n = -2$, si ha, invece:

$$(27) \quad \theta - \theta_0 = \mp Ac \int \frac{dr}{\sqrt{(E^2 - m_0^2 c^4)r^4 - (A^2 c^2 + 2Ea)r^2 + a^2}},$$

cioè un integrale ellittico.

Per $n = -3$, risulta:

$$(28) \quad \theta - \theta_0 = \mp Ac \int \frac{r dr}{\sqrt{(E^2 - m_0^2 c^4)r^6 - A^2 c^2 r^4 - 2Ear^3 + a^2}}$$

cioè un integrale iperellittico. E così via.

Soffermiamoci, in particolare, nel caso di $n = -2$, che presenta speciale interesse dal punto di vista analitico. In tale caso si può scrivere, successivamente:

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{A^2 c^2} [(E^2 - m_0^2 c^4)r^4 - (A^2 c^2 + 2Ea)r^2 + a^2],$$

$$(29) \quad \frac{A^2 c^2}{A^2 c^2 + 2Ea} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \left[\frac{E^2 - m_0^2 c^4}{A^2 c^2 + 2Ea} r^4 - r^2 + \frac{a^2}{A^2 c^2 + 2Ea} \right].$$

Operando la trasformazione:

$$r = \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{(2Ea + A^2 c^2) \left(\rho + \frac{1}{3} \right)}},$$

l'equazione differenziale (29) si muta nella seguente:

$$(30) \quad \frac{A^2 c^2}{2Ea + A^2 c^2} \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 = 4 \left(\rho + \frac{1}{3} \right) \left(\rho^2 - \frac{\rho}{3} - \frac{2}{9} + \frac{(E^2 - m_0^2 c^4) a^2}{4(2Ea + A^2 c^2)^2} \right).$$

Ora per $E^2 - m_0^2 c^4 < 0$ le radici dell'equazione di secondo grado in ρ , $\rho^2 - \frac{\rho}{3} - \frac{2}{9} - \frac{(E^2 - m_0^2 c^4) a^2}{4(2Ea + A^2 c^2)^2} = 0$ sono reali; la loro somma è uguale ad $\frac{1}{3}$ e la più piccola di esse è minore di $-\frac{1}{3}$. Perciò, indicando rispettivamente con e_1 ed e_3 la più grande e la più piccola di tali radici, ed essendo $e_2 = -\frac{1}{3}$, si ha $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, $e_1 > e_2 > e_3$. E l'equazione differenziale (30) potrà essere scritta:

$$(31) \quad \frac{A^2 c^2}{2Ea + A^2 c^2} \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 = 4(\rho - e_1)(\rho - e_2)(\rho - e_3),$$

da cui segue

$$(32) \quad \rho = \mathfrak{F}(\beta\theta - \alpha),$$

dove α è una costante, $\mathfrak{F}$ è il simbolo della funzione di WEIERSTRASS, e dove con β si è indicato il coefficiente $\frac{\sqrt{2Ea + A^2 c^2}}{Ac}$.

Si ottiene, dunque:

$$(33) \quad r = \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{(2Ea + A^2 c^2) \left[\mathfrak{F}(\beta\theta - \alpha) + \frac{1}{3} \right]}}.$$

Ricaviamo ora il tempo. Si ha:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{Ac^2}{E - V(r)} = \frac{Ac^2}{E - ar^{-2}},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{Ac^2}{Er^2 - a}, \quad dt = \frac{1}{Ac^2} (Er^2 - a) d\theta,$$

$$t - t_0 = -\frac{a}{Ac^2} \theta + \frac{E}{Ac^2} \int r^2 d\theta =$$

$$-\frac{a}{Ac^2} \theta + \frac{Ea^2}{2Ac^2(2Ea + A^2c^2)} \int \frac{d\theta}{\mathfrak{F}(\beta\theta - \alpha) + \frac{1}{3}},$$

cioè, ponendo $\theta_1 = \beta\theta - \alpha$, risulta:

$$t - t_0 = -\frac{a}{Ac^2} \theta + \frac{Ea^2}{2Ac^2\beta(2Ea + A^2c^2)} \int \frac{d\theta_1}{\mathfrak{F}(\theta_1) + \frac{1}{3}}.$$

In definitiva, si ha:

$$t - t_0 = -\frac{a}{Ac^2\beta} (\theta_1 + \alpha) + \frac{Ea^2}{2Ac^2\beta(2Ea + A^2c^2)} \int \frac{d\theta_1}{\mathfrak{F}(\theta_1) - e_2},$$

cioè

$$(34) \quad t - t_0 = -\frac{d(\theta_1 + \alpha)}{Ac^2\beta} -$$

$$-\frac{Ea^2}{2Ac^2\beta(2Ea + A^2c^2)} \frac{1}{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)} \left[\xi(\theta_1) + \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{F}'(\theta_1)}{\mathfrak{F}(\theta_1) - e_2} + e_2 \theta_1 \right],$$

dove $\xi(\theta_1)$ è simbolo della funzione *zeta* di WEIERSTRASS.

Si può osservare che, se si prendono in considerazione energie potenziali della forma, di indubbio interesse:

$$V(r) = \frac{a_1}{r} + \frac{a_2}{r^2} + \dots, \quad (a_1, a_2, \dots \text{ costanti})$$

e, per r conveniente, ci si arresta alla seconda approssimazione $V(r) \propto \frac{a_1}{r} + \frac{a_2}{r^2}$, si hanno, per la determinazione della traiettoria, integrali ellittici.

3. Passiamo ora a studiare il moto relativistico di una particella puntuale libera sotto l'azione di un « campo mesonico scalare ». Come è noto, la teoria mesonica « scalare » delle forze del nucleo atomico si basa sull'assunto che i nucleoni, costituenti del nucleo atomico stesso, siano tenuti insieme da un campo di potenziale attrattivo a corto raggio d'azione del tipo cosiddetto « scalare » (si prescinde dallo spin). L'energia potenziale del campo di forza in questione è della forma:

$$(35) \quad \Phi^*(r) = \mathcal{A} \frac{e^{-Kr}}{r},$$

dove $\mathcal{A}$ è una costante e $K = 2\pi\overline{mc}/h$, con $\overline{m}$ massa del « mesone π », c , al solito, è la velocità critica ed h la costante universale di PLANCK.

La (35) è una soluzione stazionaria della equazione differenziale relativisticamente invariante di KLEIN e GORDON:

$$(36) \quad \Delta_2 \Phi^* - K^2 \Phi^* - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial t^2} = 0.$$

Se si opera una impostazione (deterministica, cioè non quantistica) del moto di una particella puntuale in un tale campo di forza, si trova che, relativisticamente, il moto della particella in questione è lo stesso di cui essa sarebbe dotata in meccanica classica sotto l'azione di un campo di forza dipendente da una energia potenziale della forma seguente:

$$(37) \quad \Phi_1^* = \mathcal{A}(m_0^* c^2 / E)^2 \left[\frac{e^{-Kr}}{r} + \frac{\mathcal{A}}{2m_0^* c^2} \cdot \frac{e^{-2Kr}}{r^2} \right].$$

Va tenuto presente che per ognuno dei due segni che può avere la costante reale $\mathcal{A}$, l'ultimo termine nella formula sopra-scritta equivale ad un potenziale di tipo repulsivo. Questa è la

ragione per cui MARX e SZAMOSI ⁽⁴⁾ hanno pensato tale termine come responsabile del fenomeno di « scattering » nucleone-nucleone.

Nella nostra impostazione, sempre in uno schema non-quantistico, l'equazione differenziale vettoriale indefinita relativistica del moto di una particella puntuale sotto l'azione di un campo mesonico scalare sarà:

$$(38) \quad \frac{d}{dt} \left[m \frac{d(P - O)}{dt} \right] = - \mathcal{A} \frac{d}{dr} \left[\frac{e^{-Kr}}{r} \right] \cdot \frac{(P - O)}{r}.$$

Sussisteranno, al solito, l'integrale primo relativistico del momento della quantità di moto

$$(39) \quad mr^2\dot{\theta} = m_0 r^2\dot{\theta} \left(1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \Lambda (= \text{costante}),$$

nonchè l'integrale primo relativistico dell'energia:

$$(40) \quad m_0 c^2 \left(1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} + \mathcal{A} \frac{e^{-Kr}}{r} = E_1 (= \text{costante}).$$

Ne discenderà l'equazione differenziale della traiettoria:

$$(41) \quad \left(\frac{d}{dr} \frac{1}{r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{c^2 \Lambda^2} \left[\left(E_1 - \mathcal{A} \frac{e^{-Kr}}{r} \right)^2 - m_0^2 c^4 \right].$$

Questa, per separazione di variabili, fornirà:

$$(42) \quad \theta - \theta_0 = \mp \int \frac{dr}{r \sqrt{\frac{r^2}{c^2 \Lambda^2} \left[\left(E_1 - \mathcal{A} \frac{e^{-Kr}}{r} \right)^2 - m_0^2 c^4 \right] - 1}},$$

da cui supporremo, intanto, ricavato (invertendo l'integrale) r in funzione di θ . Teniamo ora presente che, al solito per eliminazione

⁽⁴⁾ G. MARX e G. SZAMOSI, « Bulletin de l'Acad. Polonaise des Sciences », 1954.

della massa maupertuisiana m fra l'integrale primo relativistico del momento della quantità di moto e l'integrale primo relativistico dell'energia, si ha:

$$(43) \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\Lambda c^2}{r^2 \left| E_1 - \mathcal{A} \frac{e^{-Kr}}{r} \right|},$$

la quale, noto r , fornisce t in funzione di θ con una quadratura. Sviluppando e^{-Kr} in serie di MAC LAURIN, e tenendo conto del fatto che e^{-Kr} stesso tende rapidamente a zero (il campo mesonico è a corto « range »), si può scrivere, in prima approssimazione:

$$(44) \quad \theta - \theta_0 = \mp \int \frac{dr}{r \sqrt{\frac{r^2}{c^2 \Lambda^2} \left[\left(E_1 - \mathcal{A} \frac{1 - Kr}{r} \right)^2 - m_0^2 c^4 \right] - 1}} =$$

$$= \mp c \Lambda \int \frac{dr}{r \sqrt{(E_1^2 + \mathcal{A}^2 K^2 + 2E_1 \mathcal{A} K - m_0^2 c^4) r^2 - (2E_1 \mathcal{A} + 2\mathcal{A}^2 K) r + (\mathcal{A}^2 - c^2 \Lambda^2)}}$$

col che la determinazione della traiettoria è ridotta, in prima approssimazione, ad una quadratura elementare che è, qualitativamente, dello stesso tipo di quella che interviene nel caso newtoniano. Il moto è, dunque, in prima approssimazione, del tipo newtoniano.

In seconda approssimazione, si ha:

$$(45) \quad \theta - \theta_0 = \mp \int \frac{dr}{r \sqrt{\frac{r^2}{c^2 \Lambda^2} \left[\left(E_1 - \mathcal{A} \frac{1 - Kr + \frac{1}{2} K^2 r^2}{r} \right)^2 - m_0^2 c^4 \right] - 1}} =$$

$$= \mp c \Lambda \int \frac{dr}{r \sqrt{G(r)}},$$

dove si ha:

$$G(r) = \frac{\mathcal{A}^2 K^2 r^4}{4} - (E_1 \mathcal{A} K^2 + \mathcal{A}^2 K^3) r^3 +$$

$$+ (E_1^2 + 2\mathcal{A}^2 K^2 + 2E_1 \mathcal{A} K - m_0^2 c^4) r^2 - (2E_1 \mathcal{A} + 2\mathcal{A}^2 K) r + (\mathcal{A}^2 - c^2 \Lambda^2),$$

cioè la determinazione della traiettoria è ridotta a quadrature ellittiche.

4. Veniamo ora a considerare il problema del moto di una particella puntuale soggetta all'azione di una forza centrale di modulo

$$(46) \quad F = \varphi(\theta)(a + bt)^{-1} \cdot r^{-2},$$

dove $\varphi(\theta)$ è una funzione nota dell'anomalia θ , ed a e b sono costanti assegnate, t è il tempo ordinario ed r la distanza fra la particella attratta ed il centro attraente ⁽⁵⁾.

L'equazione differenziale vettoriale indefinita relativistico ristretta è, nel caso che ora consideriamo:

$$(47) \quad \frac{d}{dt} \left[m \frac{d(P - O)}{dt} \right] = \frac{\varphi(\theta)}{r^2(a + bt)} \cdot \frac{(P - O)}{r}.$$

Moltiplicando ambo i membri della (47) vettorialmente a sinistra per $(P - O)$, si ottiene al solito, per il moto in questione, l'integrale primo relativistico del momento della quantità di moto:

$$(48) \quad mr^2\dot{\theta} = m_0 r^2\dot{\theta} \left(1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = M (= \text{costante}).$$

Null'altro può ricavarsi in generale. E così pel caso corrispondente a quello di JACOBI, nel quale ora ci metteremo, considerando dunque i moti definiti dall'equazione differenziale relativistica:

$$(49) \quad \frac{d}{dt} \left[m \frac{d(P - O)}{dt} \right] = \frac{\varphi(\theta)}{r^2} \cdot \frac{P - O}{r}.$$

⁽⁵⁾ Il caso in cui sia $b = 0$ è stato, come è noto, considerato in meccanica classica da JACOBI, «Zeit. für reine und angewandte Mathematik», 24, P. 5, (1827); il caso in cui sia $\varphi(\theta) = \text{costante}$ è stato considerato da MESTCHERSKY, «Astron Nachrichten», 159, p. 229, (1902); per il caso più generale, si consulti: G. ARMELLINI, «Rendic. della R. Accademia dei Lincei», XXI, 2° sem. (1912).

Se si opera su questa la trasformazione temporale (in altri casi da noi sfruttata con successo ⁽⁶⁾):

$$(50) \quad dt = \frac{m}{m_0} d\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} d\tau$$

$$\left(v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2, \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt}, \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \right),$$

dove, al solito, m_0 è la massa a riposo della particella puntuale in moto, v la sua velocità c , la velocità della luce nel vuoto e τ il tempo proprio, la (49) si trasformerà come segue:

$$\frac{d}{d\tau} \left[m \frac{d(P-0)}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} \right] \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{\varphi(\theta)}{r^2} \cdot \frac{P-0}{r},$$

cioè nella:

$$(51) \quad m_0^2 \frac{d^2(P-0)}{d\tau^2} = \frac{m\varphi(\theta)}{r^2} \cdot \frac{P-0}{r},$$

che equivale, in coordinate polari, al sistema delle due equazioni differenziali scalari:

$$(52) \quad m_0^2 \left[\frac{d^2 r}{d\tau^2} - r \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 \right] = \frac{m\varphi(\theta)}{r^2}, \quad \frac{d}{d\tau} \left(r^2 \frac{d\theta}{d\tau} \right) = 0.$$

Dalla seconda di queste si ricava l'integrale primo del momento della quantità di moto (rispetto al tempo proprio τ):

$$(53) \quad r^2 \frac{d\theta}{d\tau} = K (= \text{costante}).$$

La prima delle (52) poi, tenuto conto della (53), fornisce l'equazione differenziale:

$$(54) \quad \frac{K^2 m_0^2}{m} \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} \right) = -\varphi(\theta)$$

⁽⁶⁾ Vedi ad es: A. PIGNEDOLI, Atti del VI Congresso dell'U. M. I., 1959 (e lav. prec ivi citati).

dalla quale *non* è possibile ricavare r in funzione di θ , poichè il coefficiente $K^2 m_0^2 / m$ dipende dalle derivate di θ rispetto al tempo ordinario t , e queste *non appaiono in alcun modo eliminabili*. Il problema considerato appare, sotto tale forma, in generale non risolvibile.

Ma si può fare una semplice osservazione non priva, forse, di un certo interesse. Supponiamo di considerare una particella puntuale lanciata a velocità relativistica in un campo di forza tale che, nel sistema di riferimento solidale con la particella, il campo di forza centrale nel quale la particella stessa si muove appaia dipendente anche dall'anomalia θ secondo la legge $\varphi(\theta) \cdot (P - 0) \cdot r^{-3}$. Allora l'equazione differenziale vettoriale indefinita relativistica del moto, essendo $m \rightarrow m_0$, $t \rightarrow \tau$ si riduce per l'osservatore in questione alla seguente:

$$(55) \quad \frac{d}{d\tau} \left[m_0 \frac{d(P - 0)}{d\tau} \right] = m_0 \frac{d^2(P - 0)}{d\tau^2} = \frac{\varphi(\theta)}{r^2} \cdot \frac{P - 0}{r}.$$

L'equazione radiale

$$(56) \quad m_0 \left[\frac{d^2 r}{d\tau^2} - r \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 \right] = \frac{\varphi(\theta)}{r^2},$$

tenuto conto dell'integrale del momento della quantità di moto rispetto al tempo proprio τ , $r^2 \frac{d\theta}{d\tau} = K$, diventa:

$$(57) \quad \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = - \frac{\varphi(\theta)}{m_0 K^2} = \psi(\theta)$$

ed ammette l'integrale generale:

$$(58) \quad \frac{1}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta + G(\theta),$$

dove A e B sono costanti arbitrarie e dove $G(\theta)$ è una funzione che si determina con quadrature, essendo nota la funzione $\varphi(\theta)$.

Invero, si ha:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = -A \cos \theta - B \sin \theta + A \cos \theta + B \sin \theta + G''(\theta) = \psi(\theta),$$

(funzione nota di θ).

Ne discende che $G(\theta)$ deve soddisfare all'equazione differenziale:

$$(59) \quad G''(\theta) = \psi(\theta),$$

che fornisce:

$$(60) \quad G(\theta) = \int \left[\int \psi(\theta) d\theta \right] d\theta + c_1 \theta + c_2;$$

cioè, assumendo $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$, si ha, in definitiva:

$$(61) \quad \frac{1}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta + \int \left[\int \psi(\theta) d\theta \right] d\theta + \theta.$$

Ne consegue l'equazione polare della traiettoria:

$$(62) \quad 1 = Ar \cos \theta + Br \sin \theta + r \left[\int \left[\int \psi(\theta) d\theta \right] d\theta + \theta \right].$$

Ricordando ora che è:

$$d\tau = \frac{1}{K} r^2 d\theta,$$

si ha:

$$d\tau = \frac{1}{K} \frac{d\theta}{\left[A \cos \theta + B \sin \theta + \int \left[\int \psi(\theta) d\theta \right] d\theta + \theta \right]^2}$$

cioè, con una quadratura, il tempo dell'«orologio» solidale col mobile in funzione di θ :

$$(63) \quad \tau - \tau_0 = \frac{1}{K} \int \frac{d\theta}{\left[A \cos \theta + B \sin \theta + \int \left[\int \psi(\theta) d\theta \right] d\theta + \theta \right]^2}.$$