
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ELISA GRANDORI GUAGENTI

Osservazioni sui campi vettoriali vorticosi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 15
(1960), n.2, p. 150–158.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_2_150_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Osservazioni sui campi vettoriali vorticosi.

Nota di ELISA GRANDORI GUAGENTI (a Milano)

Sunto. - È noto che, in un campo vettoriale $\mathbf{V}$, la circolazione $\mathcal{I}$ di $\mathbf{V}$ è stazionaria lungo le linee vorticosi. In questa nota si fa qualche ulteriore osservazione.

Nel caso che $\mathbf{V}$ sia un campo piano, $\mathcal{I}$ è stazionaria anche lungo le linee ove il rotore di $\mathbf{V}$ si annulla. Anzi, su queste linee, generalmente, $\mathcal{I}$ è estrema.

Nel caso spaziale ci sono delle linee sulle quali $\mathcal{I}$ è stazionaria in un senso ristretto che verrà precisato.

Si mettono in rilievo proprietà relative a casi particolari.

Summary. - It is well known that, in a vectorial field $\mathbf{V}$, the circulation $\mathcal{I}$ of $\mathbf{V}$ is stationary along the vortex lines. Some further observations are made in this paper.

In the case in which $\mathbf{V}$ is a plane field, $\mathcal{I}$ is stationary also along the lines on which is $\text{rot } \mathbf{V} = 0$. On these lines, moreover, $\mathcal{I}$ is generally extreme.

In the spatial case there are lines on which $\mathcal{I}$ is stationary in a restricted sense, which will be specified.

Some properties regarding particular cases are illustrated.

Sia $\mathbf{V}$ un campo di vettori, indipendente dal tempo; con riferimento ad una terna cartesiana ortogonale, siano

$$(1) \quad V_x = V_x(x, y, z), \quad V_y = V_y(x, y, z), \quad V_z = V_z(x, y, z)$$

le componenti di $\mathbf{V}$. Sia inoltre

$$\mathbf{R} = \text{rot } \mathbf{V}$$

e siano

$$R_x = R_x(x, y, z), \quad R_y = R_y(x, y, z), \quad R_z = R_z(x, y, z)$$

le sue componenti.

Si consideri la circolazione $\mathcal{I}$ di $\mathbf{V}$ lungo un arco l di linea

$$(2) \quad \mathcal{I} = \int_l \mathbf{V} \times d\mathbf{P},$$

e la sua variazione infinitesima $\delta\mathcal{J}$ relativa al passaggio dall'arco l ad un qualunque arco di linea infinitamente vicino ad l e avente gli stessi estremi di l . Tale variazione si può esprimere, come dimostrò T. ZEULI ⁽¹⁾, mediante la formula

$$(3) \quad \delta\mathcal{J} = - \int \mathbf{R} \wedge dP \times \delta P.$$

Lo ZEULI si servì della (3) per dimostrare che sulle linee vorticiose di equazione

$$\mathbf{R} \wedge dP = 0,$$

$\mathcal{J}$ è stazionaria.

Si può fare qualche osservazione in merito alla (3), mettendo in luce che altre linee godono della stessa proprietà o di una proprietà analoga, ma più ristretta.

Campi piani

1. Sia $\mathbf{V}$ un campo vettoriale piano; sia x, y il piano direttore riferito ad una coppia di assi cartesiani ortogonali; siano

$$V_x = V_x(x, y), \quad V_y = V_y(x, y)$$

le componenti di $\mathbf{V}$. La sola componente di $\mathbf{R}$ non identicamente nulla sarà

$$R_z = R_z(x, y).$$

Pur essendo $\mathbf{V}$ rotazionale, esiste tuttavia una superficie sulla quale è $\mathbf{R} = 0$. Essa è il cilindro di equazione

$$(4) \quad R_z(x, y) = 0.$$

Riferendoci ovviamente al caso in cui tal superficie sia reale, vogliamo mettere in evidenza una proprietà riguardante tutte le linee che giacciono sulla superficie (4).

Chiamiamo λ tutte le linee sulle quali $\mathbf{R}$ si annulla, e quindi tutte le linee della superficie (4). Consideriamo la variazione $\delta\mathcal{J}$

⁽¹⁾ T. ZEULI, *Su di una notevole proprietà del rotore di un campo vettoriale*. «Rend. Sem. Mat. Torino», v. 8, 1947-1949, p. 223-225.

qualora l sia un arco di λ ; dalla (3) si ha che

$$\delta\mathcal{J} = 0.$$

Pertanto la circolazione è stazionaria lungo ogni tratto di λ . Per le linee λ vale dunque la stessa proprietà che lo ZEULI ha già messo in luce per le linee vorticosi (che in questo caso sono tutte le rette parallele all'asse z).

Inoltre sulla superficie (4) $\mathcal{J}$ è addirittura indipendente dal cammino percorso, perchè tutte le linee della superficie sono linee λ , e quindi su di essa è costantemente $\delta\mathcal{J} = 0$; questa proprietà, del resto, deriva (grazie al teorema di STOKES) dal fatto che sulla (4) è $\mathbf{R} = 0$.

2. Si eseguisca ora la variazione $\delta\mathcal{J}$ in modo particolare a partire da un arco l generico. Precisamente si consideri il cilindro contenente l e parallelo ad $\mathbf{R}$, cioè all'asse z . Si valuti la variazione di $\mathcal{J}$ relativa al passaggio dall'arco l ad un arco infinitamente vicino ad l , avente gli stessi estremi di l , contenuto anch'esso nel cilindro suddetto. Dalla (3) si ha (per la complanarità di $\mathbf{R}$, dP , δP)

$$\delta\mathcal{J} = 0$$

qualunque sia la linea l . Si ritrova così la ben nota proprietà per cui sui tubi vorticosi (in questo caso sui cilindri paralleli all'asse z) ⁽²⁾ la circolazione dipende solo dagli estremi del cammino percorso; in particolare essa è nulla lungo un cammino chiuso ⁽³⁾.

Riassumendo si può dire che in un campo vettoriale piano tutti i cilindri paralleli ad $\mathbf{R}$ sono superficie conservative, nel senso che su di esse la circolazione è indipendente dal cammino percorso; quel particolare cilindro su cui è $\mathbf{R} = 0$ è inoltre tale che, su tutte le linee in esso contenute, $\mathcal{J}$ è stazionaria.

⁽²⁾ Si noti che la superficie (4), pur essendo un cilindro parallelo all'asse z , non si può chiamare un tubo vorticoso perchè su di essa è $\mathbf{R} = 0$. Tuttavia anche per essa vale la stessa proprietà, come si è visto nel paragrafo precedente.

⁽³⁾ Qui e nel seguito si considerano cammini riducibili l'uno all'altro per spostamenti continui.

3. - In merito all'integrale (2) si può constatare che esso è, sulle linee λ , estremo e non solo stazionario, nel caso che R_z cambi segno attraverso al cilindro che contiene le linee λ .

Si consideri dapprima la superficie di equazione

$$(5) \quad z = R_z(x, y):$$

essa taglia il piano x, y secondo la linea λ di tale piano; nell'ipotesi suddetta tale linea separa una regione ove è $R_z > 0$ da una regione ove è $R_z < 0$. Sia l , nel piano x, y , un tratto di λ compreso fra P_1 e P_2 ; l' un arco di linea, nel piano x, y , compreso fra P_1 e P_2 , tutto situato nella regione in cui è $R_z > 0$; l'' un arco di linea, nel piano x, y , compreso anch'esso fra P_1 e P_2 , tutto situato nella regione in cui è $R_z < 0$.

Indichiamo con $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I}'$, $\mathfrak{I}''$ le circolazioni, da P_1 verso P_2 , relative a l , l' , l'' ; è noto, per il teorema di STOKES, che, se γ è una linea chiusa del piano x, y e σ l'area da essa racchiusa, è

$$\int_{\gamma} \mathbf{V} \times d\mathbf{P} = \int_{\sigma} R_z d\sigma$$

dove γ va percorsa in modo da lasciare σ alla sinistra. Quindi la circolazione di $\mathbf{V}$ eguaglia la cubatura di una calotta della superficie (5). Pertanto si ha, a seconda dei casi,

$$\mathfrak{I} - \mathfrak{I}' > 0 \quad \text{e} \quad \mathfrak{I}'' - \mathfrak{I} < 0,$$

oppure

$$\mathfrak{I}' - \mathfrak{I} > 0 \quad \text{e} \quad \mathfrak{I} - \mathfrak{I}'' < 0;$$

e quindi

$$\mathfrak{I} > \mathfrak{I}' \quad \text{e} \quad \mathfrak{I} > \mathfrak{I}'',$$

oppure

$$\mathfrak{I} < \mathfrak{I}' \quad \text{e} \quad \mathfrak{I} < \mathfrak{I}''.$$

Si noti che $\mathfrak{I}$ è maggiore (o minore) anche della circolazione lungo archi di linee, sempre nel piano x, y e compresi fra P_1 e P_2 , che intersechino l (basta ripetere lo stesso ragionamento per ogni tratto di linea non intersecato).

Con ciò si può concludere soltanto che $\mathfrak{I}$ è massima (o minima) sulla linea λ del piano direttore rispetto alle altre linee contenute nello stesso piano.

Consideriamo ora un arco qualunque di linea s^* compreso, come l , fra P_1 e P_2 , ma non contenuto nel piano direttore; sia s la proiezione ortogonale di s^* sul piano direttore. La circolazione su s coincide con la circolazione su s^* . Pertanto $\mathfrak{J}$ è maggiore (o minore) anche della circolazione su s^* . Inoltre quanto detto per la linea λ del piano direttore vale ovviamente anche per le linee λ dei piani ad esso paralleli.

Finora è dunque dimostrato che $\mathfrak{J}$ è massima (o minima) sulle linee λ dei piani perpendicolari ad $\mathbf{R}$.

Si consideri ora un qualunque arco di linea, compreso fra P e Q ; sia Q' la proiezione ortogonale di Q sul piano passante per P e parallelo al piano direttore. La circolazione relativa al cammino chiuso formato dall'arco PQ' , dal tratto rettilineo $Q'Q$ (parallelo ad $\mathbf{R}$) e dall'arco QP è nulla; ma è nulla anche la circolazione relativa a $Q'Q$ (che è perpendicolare a $\mathbf{V}$). Pertanto le circolazioni relative ad un qualunque arco PQ e alla sua proiezione coincidono. Si consideri allora la circolazione relativa ad un arco λ qualunque, compreso fra P e Q e la si confronti con le circolazioni relative a tutti gli altri archi PQ . Tutte queste circolazioni coincidono con quelle relative alle proiezioni degli archi stessi. Perciò la circolazione relativa all'arco λ PQ , come quella relativa all'arco λ PQ' , è massima (o minima).

È dunque infine dimostrato che in un campo vettoriale piano, nell'ipotesi indicata in principio a questo paragrafo (e che generalmente si verifica), tutte le linee λ sono tali che su di esse la circolazione è massima (o minima).

OSSERVAZIONE. — In generale, essendo $\mathbf{V}$ rotazionale, la circolazione lungo una linea chiusa γ^* è diversa da zero, a meno che γ^* appartenga alla superficie di un tubo vorticoso (senza che lo abbracci). Nel caso considerato in questo paragrafo, in cui il campo è piano e R_z cambia segno attraverso al cilindro di rotore nullo, la circolazione lungo una linea chiusa γ^* può essere nulla, purchè γ^* intersechi il cilindro suddetto.

La circolazione su γ^* coincide con la circolazione su γ , proiezione di γ^* sul piano x, y ; γ interseca la linea λ di tale piano. Sia σ l'area racchiusa da γ ; σ_1 e σ_2 siano le porzioni di γ che giacciono da parti opposte rispetto a λ . Perchè sia

$$\int_{\gamma} \mathbf{V} \times d\mathbf{P} = 0,$$

e di conseguenza

$$\int_{\gamma^*} \mathbf{V} \times d\mathbf{P} = 0,$$

occorre e basta (grazie al teorema di STOKES) che le cubature della superficie (5) relative a σ_1 e a σ_2 coincidano in valore assoluto.

Campi spaziali

1. Sia sempre $\mathbf{V}$ il vettore del campo. Siano le (1) le sue componenti. Nel caso spaziale generico non esistono linee λ (cioè linee sulle quali sia $\mathbf{R} = 0$). L'annullarsi di $\mathbf{R}$ è verificato solo nel punto (o nei punti) le cui coordinate soddisfano al seguente sistema

$$(6) \quad R_x(x, y, z) = 0 \quad R_y(x, y, z) = 0 \quad R_z(x, y, z) = 0.$$

Esistono tuttavia delle linee, che diremo λ' , sulle quali $\mathbf{R}$ ha una direzione costante. Si consideri ad esempio quella su cui $\mathbf{R}$ ha la direzione dell'asse z . Tale linea ha le seguenti equazioni

$$(7) \quad R_x(x, y, z) = 0 \quad R_y(x, y, z) = 0.$$

Per essa vale una proprietà analoga a quella già trovata per le linee λ , un po' meno generale. Precisamente si consideri il cilindro parallelo ad $\mathbf{R}$ contenente λ' ; si indichi ancora con l un arco di λ' . Valutiamo la variazione infinitesima $\delta\mathcal{J}$, sempre data dalla (3), che $\mathcal{J}$ subisce nel passare dall'arco l ad un arco infinitamente vicino ad l , avente gli stessi estremi di l , anch'esso contenuto nel cilindro suddetto. Si ha (per la complanarità di $\mathbf{R}$, $d\mathbf{P}$, $\delta\mathbf{P}$) che

$$\delta\mathcal{J} = 0.$$

Quindi sulla linea (7) $\mathcal{J}$ è stazionaria, purchè la variazione sia eseguita nel modo indicato.

Come la (7) è linea λ' , così lo sono anche tutte quelle linee lungo le quali $\mathbf{R}$ ha direzione costante, di coseni direttori $\cos \alpha$,

$\cos \beta$, $\cos \gamma$; esse sono le linee di equazioni

$$(8) \quad \frac{R_x}{\cos \alpha} = \frac{R_y}{\cos \beta} = \frac{R_z}{\cos \gamma}$$

e sono ∞^2 ; nelle linee (8) è ovviamente compresa anche la linea (7).

Pertanto si può dire che nel caso spaziale non ci sono linee, oltre a quelle vorticose, lungo le quali la circolazione di $\mathbf{V}$ è stazionaria in senso proprio; ci sono tuttavia delle linee λ' lungo ogni tratto delle quali $\mathfrak{J}$ è stazionaria nel senso ristretto sopra precisato. Esse sono ∞^2 linee (8), e passano per i punti in cui è $\mathbf{R} = 0$, punti le cui coordinate sono date dalle (6).

2. Consideriamo il caso particolare in cui le (8) siano identicamente soddisfatte, cioè il caso in cui dappertutto $\mathbf{R}$ abbia direzione costante, e diciamo $\mathbf{h}$ il versore di coseni direttori $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$. Il caso è allora del tutto analogo a quello piano. Esiste una superficie (non è detto che sia un cilindro in questo caso) sulla quale è $\mathbf{R} = 0$. Essa è analoga alla (4) del caso piano ed ha per equazione

$$(9) \quad \mathbf{R} \times \mathbf{h} = 0.$$

Pertanto, come nel caso piano, si può dire che tutte le linee della (9) sono linee λ e su di esse $\mathfrak{J}$ è stazionaria in senso proprio. Inoltre la (9) e tutti i cilindri paralleli ad $\mathbf{R}$ sono superficie conservative nel senso che su di essi $\mathfrak{J}$ è indipendente dal cammino percorso.

3. Si consideri il caso in cui il rotore sia sempre parallelo ad un piano fisso; diciamo x, y tale piano. In tal caso è identicamente soddisfatta la condizione

$$(10) \quad R_z(x, y, z) = 0.$$

Allora la linea (7) viene ad essere tale che su di essa è $\mathbf{R} = 0$, e cioè viene ad essere una linea λ per cui vale la proprietà più generale.

Sempre nel caso in esame, in cui è identicamente soddisfatta

la (10), consideriamo la superficie di equazione

$$(11) \quad R_x(x, y, z) = 0$$

e la superficie di equazione

$$(12) \quad R_y(y, y, z) = 0.$$

Le linee in esse contenute sono linee λ' perchè su di esse c'è una sola componente di $\mathbf{R}$ diversa da zero. Allora la proprietà ristretta già stabilita vale per le linee delle superficie (11) e (12).

Riassumendo si può dire che, qualora $\mathbf{R}$ sia parallelo ad un piano fisso, anche nel caso spaziale c'è una linea, oltre a quelle vorticose, lungo ogni tratto delle quali $\mathcal{J}$ è stazionaria in senso proprio; essa è la linea (7) sulla quale $\mathbf{R}$ si annulla, e passa per il punto (o i punti) di coordinate soddisfacenti il sistema (6); ci sono inoltre delle superficie lungo ogni linea delle quali la circolazione è stazionaria in senso ristretto; esse sono le superficie (11) e (12), e passano per la linea (7).

Osservazioni idrodinamiche

1. Consideriamo i moti di BELTRAMI per i quali, se $\mathbf{v}$ è la velocità del fluido, è

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = 0.$$

Per tali movimenti le linee di flusso coincidono con quelle vorticose. Quindi, pei moti di BELTRAMI, la proprietà che lo ZEULI ha dimostrato valere per le linee vorticose, si può enunciare anche per le linee di flusso.

2. Consideriamo un fluido perfetto in moto stazionario piano, soggetto a forza unitaria di massa conservativa. Per tali moti vale l'equazione

$$(13) \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} + \operatorname{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 - \mathcal{M} + \mathcal{S} \right) = 0,$$

dove $\mathcal{M}$ è il potenziale unitario e $\mathcal{G}$ l'entalpia. Sia x, y il piano direttore e si indichi sempre con $\mathbf{R}$ il rotore di $\mathbf{v}$. Si consideri il cilindro (4) sul quale il rotore di $\mathbf{v}$ si annulla; su di esso la (13) diviene

$$\text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 - \mathcal{M} + \mathcal{G} \right) = 0.$$

Pertanto, nelle condizioni precisate, il trinomio [di BERNOULLI è costante sulla superficie (4).

Tenuto conto di tale risultato, viene spontanea la domanda: la superficie (4) ha qualche analogia con le superficie di BERNOULLI? (⁴). È chiaro che, essendo $\mathbf{R} = 0$ sulla (4), essa non è propriamente una superficie di BERNOULLI; tuttavia ha con tali superficie qualche affinità, per lo meno nel caso che il fluido sia incompressibile.

Si noti infatti che nel movimento piano considerato le superficie di BERNOULLI sono i cilindri perpendicolari al piano direttore e passanti per le linee di flusso.

Nel caso che il fluido sia incompressibile, si introduca la funzione di corrente ψ . Si ha in tal caso che

$$(14) \quad \Delta\psi = F(\psi),$$

essendo F una funzione arbitraria (⁵). Là dove il vortice è costante (ossia $\Delta\psi = \text{cost.}$), è anche $\psi = \text{cost.}$, e viceversa; cioè tutte e sole le linee di flusso sono tali che su di esse il rotore è costante (⁶). In particolare la linea λ del piano x, y (sulla quale è costantemente $\mathbf{R} = 0$) è una linea di flusso; pertanto la superficie (4), pur non essendo propriamente una superficie di BERNOULLI, gode di queste tre proprietà: passa per una linea di flusso, è perpendicolare al piano direttore, e su di essa il trinomio di BERNOULLI è costante.

(⁴) B. CALDONAZZO, *Un'osservazione a proposito del teorema di BERNOULLI*, «Bollettino dell'U. M. I.», v. IV, 1925, p. 1-3.

(⁵) U. CISOTTI, *Idromeccanica piana*, parte I, Milano, 1921, p. 58.

(⁶) A. MASOTTI, *Sui moti di un liquido perfetto che avvengono per strati piani*, «Rend. Acc. Naz. Lincei», s. 6, v. V, 1927, p. 985-989.