Bollettino
Unione Matematica Italiana

Luigi Muracchini

Sulle trasformazioni puntuali che mutano cerchi in cerchi o sfere in sfere.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **15** (1960), n.2, p. 140–149.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_2_140_0>

Sulle trasformazioni puntuali che mutano cerchi in cerchi o sfere in sfere.

Nota di LUIGI MURACCHINI (a Bologna)

Sunto. - *Si determinano le trasformazioni puntuali fra due piani che mutano ∞^2 cerchi in cerchi. Successivamente si determinano le trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari che mutano ∞^3 sfere in sfere.*

Summary. - *Point transformations between two planes are determined which change ∞^2 circles into circles. Transformations are then determined between two spaces which change ∞^3 spheres into spheres.*

1. In una mia Nota di questo Bollettino (¹) ho studiato le trasformazioni puntuali analitiche fra due piani, dal punto di vista della geometria conforme. Ho stabilito in quel lavoro una proposizione che enuncio ora nel modo seguente:

Ogni trasformazione puntuale analitica T, *fra due piani* π, π' *che non sia una affinità circolare e che muti* ∞^2 *circonferenze in circonferenze* (²) *si ottiene ponendo una corrispondenza omografica fra la rete delle rette di un piano ed una rete qualsivoglia di circonferenze dell'altro piano, oppure si ottiene componendo opportunamente* (³) *trasformazioni del tipo indicato.*

Di tale proposizione viene dato, nel lavoro indicato in (¹), una dimostrazione forse troppo schematica che potrebbe lasciare qualche

(¹) L. MURACCHINI, *Sulla geometria differenziale conforme delle trasformazioni puntuali fra piani*, « Boll. U. M. I. » (3), 8, 252-258 (1953).

(²) Rette e cerchi vanno naturalmente limitati a loro segmenti e archi convenienti in opportuni dominî di π, π' (cfr. il n. 2). Inoltre *supporremo che il sistema* ∞^2 *sia analitico.* Così dicasi dei sistemi di sfere di cui si parla in seguito.

(³) Quì naturalmente si considerano (secondo il punto di vista conforme) le rette come particolari circonferenze ed i piani come particolari sfere. È ben chiaro come vadano composte le trasformazioni indicate (e del resto ciò è spiegato alla fine del n. 4) dubbio sulla validità del risultato. Nel presente lavoro do una dimostrazione dettagliata di quella proposizione in modo da togliere gli eventuali dubbi ai quali ho accennato.

Successivamente dimostro una seconda proposizione che stabilisce un risultato analogo al precedente, ma relativo a trasformazioni puntuali fra spazi ordinari:

Ogni trasformazione puntuale analitica fra due spazi ordinari S_3, S_3' *che non sia conforme e muti* ∞^3 *sfere in sfere si ottiene ponendo una corrispondenza omografica fra il sistema lineare* ∞^3 *dei piani di uno spazio ed un qualsivoglia sistema lineare* ∞^3 *di sfere dell'altro spazio, oppure si ottiene componendo opportunamente trasformazioni del tipo indicato.*

Incidentalmente, nel corso delle dimostrazioni, si ottengono proprietà locali conformi delle trasformazioni puntuali fra piani e spazi ordinari.

2. Consideriamo due piani euclidei π, π' e siano fissati in essi riferimenti cartesiani ortogonali; indicheremo con (x, y) le coordinate di un punto di π, con (x', y') quelle di un punto di π'. Le equazioni

$$\left\{\begin{array}{l} x' = f(x, y) \\ y' = \varphi(x, y) \end{array}\right. \tag{1}$$

dove le f, φ sono funzioni analitiche delle due variabili x, y definite in un dominio D del piano π, in nessun punto del quale si annulla il determinante funzionale

$$J = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

rappresentano analiticamente una trasformazione T puntuale analitica che muta i punti del dominio D di π nei punti di un dominio D' di π'. Per le ipotesi fatte, le (1) sono univocamente invertibili e la T biunivoca limitatamente ai punti di D e D'. Diremo che la trasformazione T muta una circonferenza (o cerchio) γ di π in una circonferenza γ' di π' quando i punti di un arco della γ che appartengono a D (eventualmente tutti i punti di γ se è contenuta tutta in D) vengono mutati in punti di D' che appartengono ad un arco di una circonferenza γ' di π'. E così diremo che T muta

∞^h circonferenze (o cerchi) di π in circonferenze di π', quando muta gli archi di quelle circonferenze di π che sono contenuti in D, in archi di circonferenze contenuti in D'.

Consideriamo ora una coppia di punti corrispondenti in T; possiamo supporre di averli scelti come origini O, O' dei sistemi di riferimento in π, π'. Allora le equazioni (1), sviluppando in serie di potenze i secondi membri, nell'intorno di O, si scriveranno:

$$\left\{\begin{aligned} x' &= a_{10}x + a_{01}y + \sum_{i+j\geq 2} a_{ij}x^iy^j \\ y' &= b_{10}x + b_{01}y + \sum_{i+j\geq 2} b_{ij}x^iy^j. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Vogliamo intanto determinare gli elementi differenziali E_3 circolari ([4]) di centro O che vengono mutati da T in E_3' circolari di centro O'. Un generico E_3 di centro O ha equazione

$$y = m_1x + m_2x^2 + m_3x^3 \tag{3}$$

ed è circolare se

$$m_3(1 + m_1^2) - 2m_1m_2^2 = 0. \tag{4}$$

L'elemento E_3' corrispondente è dato da:

$$y' = n_1x' + n_2x'^2 + n_3x'^3 \tag{5}$$

avendosi:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{b_{10} + b_{01}m_1}{a_{10} + a_{01}m_1} \\ n_2 &= \frac{H(m_1) + K(m_1)m_2}{(a_{10} + a_{01}m_1)^3} \\ n_3 &= \frac{L(m_1) + M(m_1)m_2 + N(m_1)m_2^2 + P(m_1)m_3}{(a_{10} + a_{01}m_1)^5} \end{aligned} \tag{6}$$

ed essendo H, K, L, M, N, P polinomi (i cui coefficienti sono

([4]) Elementi differenziali E_3 appartenenti ad un cerchio.

espressioni nelle a_{ij}, b_{ij}) della variabile m_1 dei gradi rispettivi 3, 1, 5, 3, 1, 2. Non daremo qui esplicitamente le espressioni di quei polinomi che non hanno interesse per il seguito.

L'elemento $E_3{}^1$ è circolare quando si abbia

$$n_3(1 + n_1{}^2) - 2n_1n_2{}^2 = 0\,;$$

sostituendo in questa condizione le espressioni (6) si ottiene finalmente l'equazione

$$A(m_1) + B(m_1)m_2 + C(m_1)m_2{}^2 = 0 \tag{7}$$

dove

$$\begin{aligned} A(m_1) &= (1 + m_1{}^2)\{L(F^2 + G^2) - 2GH^2\} \\ B(m_1) &= M(1 + m_1{}^2)(F^2 + G^2) - 4G(1 + m_1{}^2)HK \\ C(m_1) &= N(1 + m_1{}^2)(F^2 + G^2) + 2Pm_1(F^2 + G^2) - 2G(1 + m_1{}^2)K \\ F &= a_{10} + a_{01}m_1, \quad G = b_{10} + b_{01}m_1. \end{aligned} \tag{7'}$$

Se la trasformazione T è una trasformazione conforme (in ogni coppia di punti corrispondenti) si avrà

$$a_{10} = b_{01}, \quad a_{01} = -b_{10} \tag{8'}$$

ed inoltre

$$2a_{20} = b_{11}, \quad a_{11} = 2b_{02}, \quad a_{11} = -2b_{20}, \quad 2a_{20} = -b_{11}. \tag{8''}$$

Le (7') quando valgano le (8'), (8'') danno

$$C \equiv 0, \quad B \equiv 0 \tag{9}$$

come si verifica facilmente. Si verifica pure (e del resto è ovvio) che se T è una affinità circolare anche $A \equiv 0$. Possiamo dunque intanto concludere che:

Una trasformazione T *non conforme, muta* ∞^1 *degli* E_3 *circolari di centro un punto* O, *in* E_3' *circolari di centro il corrispondente* O' *di* O. *Per ogni* E_1 *di centro* O (E_1' *di centro* O') *passano due di quegli* ∞^1 E_3 *circolari. Inoltre i cerchi del piano* π, *contenenti gli* ∞^1 E_3 *circolari di centro* O, *che la* T *muta in* E_3' *circolari, costituiscono un sistema algebrico* ∞^1; *vi sono due di quei cerchi che toccano in* O *una retta assegnata genericamente.*

3. Le trasformazioni T fra piani che considereremo d'ora in poi saranno sempre trasformazioni non conformi.

Le relazioni (4) e (7) possono essere utilizzate come equazioni differenziali quando si pensi che la formula (3) dia i primi termini dello sviluppo in serie dell'ordinata $y(x)$ secondo le potenze dell'ascissa x, di un punto mobile su una curva passante per O. Si ha così

$$m_1 = y'(x), \quad m_2 = \frac{1}{2} y''(x), \quad m_3 = \frac{1}{6} y'''(x) \tag{10}$$

e le (4) e (7) diventano (5)

$$4A(y') + 2B(y')y'' + C(y')y''^2 = 0 \tag{11}$$

$$y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2 = 0. \tag{12}$$

La equazione (12) ha come curve integrali quelle di cui ogni E_3 è circolare cioè le ∞^3 circonferenze del piano. La prima equazione ha ∞^2 curve $\mathcal{C}$ integrali, delle quali ne passano due per ogni punto e tangente del dominio D. Tali curve $\mathcal{C}$ godono della seguente proprietà: *l'* E_3 *del cerchio osculatore in ogni punto* O *di una curva* $\mathcal{C}$ *viene mutato da* T *in un* E_3' *circolare.* Quest'ultima proprietà permette di pervenire alla seguente conclusione: ogni circonferenza (o arco di circonferenza) del piano π che venga mutata da T in circonferenza, è integrale dell'equazione (11) e viceversa se una circonferenza è integrale della (11) essa viene mutata da T in circonferenza.

Possiamo ora trattare il problema di determinare le trasformazioni T non conformi che mutano ∞^2 circonferenze in circonferenze. Derivando intanto il primo membro della (11) e tenendo conto della (10) si ottiene un'altra equazione differenziale

$$A_1(y') + B_1(y')y'' + C_1(y')y''^2 + D_1(y')y''^3 = 0 \tag{13}$$

(5) Se la T è conforme, in base a quanto è stato detto prima, la (11) si riduce ad una equazione del 1° ordine $A(y') = 0$ (sempre che T non sia una affinità circolare). Attualmente la trasformazione muta ancora ∞^1 E_3 circolari di centro un punto O, in E_3' circolari di centro O'; ma quegli E_3 (E_3') sono tutti tangenti all'una o all'altra di due certe rette per O (per O'). Se ne deduce che: *se* T *è conforme e muta* ∞^2 *cerchi in cerchi è necessariamente una affinità circolare.* (cfr. il lavoro citato in (1)).

dove A_1, B_1, C_1, D_1 sono ancora polimoni in y'. Ogni curva integrale della (11) che sia una circonferenza è anche integrale della (13) e viceversa; dunque le circonferenze che T muta in circonferenze vanno ricercate fra gli integrali comuni alle equazioni (11) e (13). Queste ultime sono algebriche in y', y'' e pertanto è chiaro che se T muta ∞^2 circonferenze in circonferenze queste dovranno essere integrali di una equazione differenziale del 2° ordine il cui primo membro sarà un polinomio in y', y'' che divide i primi membri delle equazioni (11) e (13). Ma essendo la (11) di secondo grado in y'' e la (13) di terzo grado, si dovranno prendere in considerazione due possibilità: *a*) che i primi membri delle equazioni (11) e (13) hanno un fattore comunè di primo grado in y'' (e naturalmente algebrico in y'); *b*) che il primo membro della (11) divide il primo membro della (13).

Nei nn. 4 e 5 esamineremo ora successivamente le due possibilità.

4. Supponiamo dunque che i primi membri delle equazioni (11) e (13) abbiano un fattore comune di 1° grado [6] in y'':

$$R(y')y'' + S(y') = 0 \tag{14}$$

R ed S essendo polinomi in y'.

Le ∞^2 curve, integrali della equazione (14) sono pertanto circonferenze che T muta in circonferenze; è chiaro che *fra tali circonferenze, quelle che passano per un punto generico* O *di* D *costituiscono un sistema* ∞^2 *algebrico* dato che la (14) è algebrica in y', y''. Ebbene le ∞^2 circonferenze integrali della equazione (14) costituiscono necessariamente un sistema lineare (o rete). Si pensi infatti ad una S_3 i cui punti rappresentano le ∞^3 circonferenze di un piano π nel noto modo: i cerchi punti hanno per immagine i punti di una quadrica Q non specializzata; le affinità circolari di π sono rappresentate dalle omografie della S_3 che mutano Q in sè; la rete di circonferenze passanti per un punto O di π, da un

[6] Rientra nella trattazione del presente n. 4 anche il caso in cui il primo membro della (11) si spezzi razionalmente in due fattori lineari, entrambi i fattori essendo divisori del primo membro della (13). Si ragionerà allora sull'uno o l'altro dei due fattori. Così pure rientra nella trattazione il caso in cui il primo membro della (11) è un quadrato perfetto di un divisore del primo membro della (13).

piano tangente a Q; il fascio di circonferenze tangenti in O ad una retta data, da una retta tangente a Q. Orbene in tale rappresentazione le ∞^2 circonferenze integrali della equazione (14) saranno rappresentate dai punti di una superficie (o pezzo di superficie) Σ segata dagli ∞^2 piani tangenti a Q secondo curve piane algebriche e incontrata dalle ∞^3 rette tangenti a Q in uno ed un sol punto (diverso dal punto di contatto). Pertanto Σ dovrà essere una superficie algebrica (7) ed anzi dovrà essere un piano.

Rimane così dimostrato che, nel caso attuale, le ∞^2 circonferenze che T muta in circonferenze costituiscono in π una rete ed è chiaro che costituiranno una rete anche le ∞^2 circonferenze di π'. Dobbiamo ora provare che la trasformazione T subordina fra le due reti di circonferenze una corrispondenza omografica. Ciò può dedursi subito da un risultato ottenuto da B. SEGRE (8) secondo il quale: una trasformazione S fra due piani π', π'' che muti le rette di π'' nei cerchi di una rete $\mathfrak{R}'$ di π' subordina fra le rette di π'' e i cerchi di $\mathfrak{R}'$ una corrispondenza omografica . Nel nostro caso componendo la trasformazione T fra π e π' con una trasformazione del tipo S di cui sopra, si ottiene una trasformazione S' fra π e π'' che muta ancora le rette di π'' nei cerchi di una rete $\mathfrak{R}$ di π. Applicando allora alla S' la proposizione di B. SEGRE enunciata prima si perviene al risultato voluto.

5. Passiamo ora a trattare il caso $b)$ in cui il primo membro della (11) (9) divide il primo membro della (13). Attualmente tutte le curve integrali della (11) sono circonferenze (mutate da T in circonferenze). Orbene dimostreremo che: *il caso attuale non si può presentare senza che* T *si riduca ad una affinità circolare.*

Intanto, argomentando come al principio del n. 4, si conclude che attualmente le ∞^2 circonferenze di π, integrali della (11), costituiscono un sistena K algebrico ∞^2 di indice 2 e così pure sarà per le circonferenze trasformate di π'. I due sistemi ∞^2 di circon-

(7) Si vede senza difficoltà alcuna che: una superficie di S_3 analitica che contenga ∞^2 curve piane algebriche, essendo il sistema analitico, è necessariamente algebrica.

(8) B. SEGRE, *Generalizzazione di un teorema di Beltrami*, « Boll. U. M. I. » (3), 4, 16-22, al n. 4.

(9) Il primo membro della (11) si supporrà d'ora in poi irriducibile rispetto alle variabili y', y''. I casi di riducibilità rientrano nella trattazione già fatta. (Cfr. la (6)).

ferenze (K di π e K' di π') saranno rappresentati nel solito modo da due quadriche (non spezzate) K e K' di due spazi S_3, S_3' e la T indurrà una corrispondenza $\mathcal{T}$ fra i punti di K e di K'.

È chiaro che nella corrispondenza $\mathcal{T}$ si corrispondono coniche γ sezioni di K con i piani tangenti alla quadrica Q (rappresentativa dei cerchi punto) e coniche γ' sezioni di K' con i piani tangenti a Q'. Ora è noto che: una trasformazione puntuale fra due superficie Σ, Σ' di due spazi ordinari, subordina fra i piani osculatori a curve corrispondenti di Σ e Σ', uscenti da due punti corrispondenti (nei quali due punti si considerano i piani osculatori predetti) una corrispondenza cremoniana ([10]). Applichiamo alla corrispondenza $\mathcal{T}$ fra K e K' la proposizione precedente, tenendo presente che nella corrispondenza cremoniana di cui sopra si dovranno corrispondere in particolare i piani delle coniche γ sezioni di K coi piani tangenti a Q passanti per un punto O di K stessa ed i piani delle analoghe coniche γ' di K' passanti per il punto O'. Dobbiamo così concludere che la $\mathcal{T}$ subordina fra i piani delle coniche γ uscenti da un punto O di K e i piani delle coniche γ' uscenti dal punto O' di K', una corrispondenza proiettiva. Ciò significa (riportandoci ai piani π e π' ed alla trasformazione T) che: se si considera in π un cerchio ω del sistema $K\ \infty^2$ di cerchi che T muta in archi, ed il cerchio ω' corrispondente e si chiamano corrispondenti il sistema $\sigma\,\infty^1$ di cerchi di K in π passanti per un punto P di ω ed il sistema $\sigma'\,\infty^1$ dei cerchi di π' (trasformati in T di quelli di σ) i quali passano per il punto P' di ω', la corrispondenza che così si ottiene fra i sistemi come σ, σ' relativi ai punti di ω e ω' è proiettiva. Ciò equivale poi a dire che T *subordina fra i punti di* ω *e* ω' *una corrispondenza proiettiva.*

Se si tien conto di tutto ciò che precede riguardo a T ed ai sistemi K e K' e si applica a ciascuno dei piani π, π' una inversione circolare di centri due punti P, P' (corrispondenti in T) allora la trasformazione T si muta in una trasformazione T_1 (fra i piani π_1, π_1' inversi dei piani π, π') che muta le tangenti ad una conica λ_1 irriducibile di π_1 nelle tangenti ad una conica λ_1' (irriducibile) di π_1' subordinando fra due tangenti corrispondenti una proiettività e facendo corrispondere i punti di contatto. Ma è subito visto che una siffatta trasformazione T_1 e una omografia,

([10]) Si tratta di un risultato dovuto ad E. Bompiani. (Cfr. *Proprietà generali della rappresentazione puntuale fra due superficie*, « Ann. di Mat. », 4 (1), 259-284 (1924)).

anzi, nel caso attuale, una similitudine e di conseguenza la trasformazione T è una affinità circolare.

Le conclusioni del presente n. 5 e del precedente n. 4 provano completamente la prima delle proposizioni enunciate nel n. 1.

6. Passando a trattare delle trasformazioni T fra due spazi euclidei S_3, S_3' non conformi e che mutano ∞^3 sfere in sfere, si dimostra la seconda delle proposizioni enunciate nel n. 1 con argomentazioni del tutto analoghe a quelle svolte per il caso di trasformazioni fra piani; anzi la dimostrazione è, come ora vedremo, più semplice presentandosi un solo caso da esaminare.

Supponiamo di aver fatto su T ipotesi analoghe a quelle del principio del n. 2 e di aver riferito gli spazi S_3, S_3' a sistemi di coordinate cartesiane ortogonali (x, y, z), (x', y', z') avendo preso come origini O, O' due punti corrispondenti in T (la quale supporremo sempre essere non conforme). Le equazioni di T, sviluppate in serie di potenze di x, y, z si scriveranno:

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= \sum_{i+j+k\geq 1} a_{ijk} x^i y^j z^k \\ y' &= \sum_{i+j+k\geq 1} b_{ijk} x^i y^j z^k \\ z' &= \sum_{i+j+k\geq 1} c_{ijk} x^i y^j z^k \end{aligned} \right. .$$

Consideriamo una calotta superficiale del secondo ordine di centro O in S_3:

$$(16) \qquad z = px + qy + \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2).$$

Tale calotta risulta essere sferica se valgono le relazioni:

$$(17) \qquad r = \frac{(1+p^2)s}{pq}, \qquad t = \frac{(1+q^2)s}{pq}.$$

La calotta di centro O' in S_3' corrispondente in T della (16) ha equazione della forma

$$(18) \qquad z' = p'x' + q'y' + \frac{1}{2}(r'x'^2 + 2s'x'y' + t'y'^2)$$

dove p', q', r', s', t' sono funzioni razionali di p, q, r, s, t a coefficienti espressioni nelle a_{ijk}, b_{ijk}, c_{ijk} (che figurano nella (15)). Non importa dare qui esplicitamente le espressioni predette; basterà che si rilevi come, esprimendo che le due calotte (16) e (17) sono sferiche, si perviene a due equazioni in p, q, s che sono della forma seguente:

$$\begin{aligned} A_1(p,\ q)s + B_1(p,\ q) &= 0 \\ A_2(p,\ q)s + B_2(p,\ q) &= 0 \end{aligned} \tag{19}$$

dove A_1, A_2, B_1, B_2 sono polinomi in p e q.

Si può intanto concludere che: *una trasformazione* T *non conforme muta* ∞^1 *calotte sferiche di centro un punto* O *in calotte sferiche di centro il punto corrispondente* O′, *in generale.*

Se la trasformazione T muta ∞^3 sfere in sfere vi saranno ∞^2 calotte sferiche di centro un punto O di S_3 che vengono mutate da T in calotte sferiche di centro O' in S_3' e i piani tangenti a tali calotte riempiranno le stelle di centri O, O'. Pertanto i due primi membri delle due equazioni (19) dovranno avere un fattore comune del tipo:

$$A(p,\ q)s + B(p,\ q) = 0 \tag{20}$$

con $A \equiv\!\!\!|\ 0$ e B polinomi in p e q. L'equazione (20) può interpretarsi come equazione differenziale (coi soliti significati di p, q, s e cioè $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$) analoga alla equazione (11) del n. 3 relativa alle trasformazioni fra piani. Come allora si ha che ogni sfera integrale della (20) viene mutata da T in sfera e viceversa ogni sfera di S_3 che T muta in sfera è integrale della (20). La forma della equazione (20), lineare in s e algebrica in p, q mostra poi che se T muta ∞^3 sfere in sfere, le ∞^2 fra esse in S_3 che passano per un punto O costituiscono un sistema algebrico e ve n'è una sola che tocca un dato piano in O. Ricorrendo ad un S_4 rappresentativo delle sfere di S_3 al modo noto e ragionando come nel caso del piano (n. 4) si concluderà che le ∞^3 sfere mutate da T in sfere costituiscono in ciascuno spazio un sistema lineare.

Infine si dimostrerà che la corrispondenza subordinata da T fra i due sistemi lineari di sfere è omografica, ricorrendo al risultato analogo a quello di B. SEGRE, ricordato nel n. 4, oppure anche osservando che fra i due iperpiani immagini dei due sistemi di sfere in spazi S_4 la T induce una corrispondenza $\mathcal{T}$ che muta piani in piani e pertanto è una omografia.