Bollettino
Unione Matematica Italiana

Antonio Andreatta

Sistemi lineari ∞^r reali, di ipersuperficie algebriche di S_r, con jacobiana priva di punti reali.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **15** (1960), n.2, p. 134–139.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_2_134_0>

Sistemi lineari ∞^r reali, di ipersuperficie algebriche di S_r, con jacobiana priva di punti reali.

Nota di ANTONIO ANDREATTA (a Pavia)

Sunto. - *Con mezzi topologici si dimostra, assai rapidamente, che se un sistema* Σ *lineare* ∞^r *reale di ipersuperficie algebriche di* S_r $(r \geq 2)$ *ha la jacobiana priva di punti reali, le parti reali delle ipersuperficie di* Σ *costituiscono un sistema grafico. In campo reale il sistema* Σ *è cioè astrattamente assimilabile a quello degli iperpiani di uno spazio proiettivo reale ad r dimensioni.*

Summary. - *Using some topological tools, the following result is obtained: In* S_r(S_r *being the r-dimensional complex projective space, with* $r \geq 2$), *if the Jacobian primal of a real* ∞^r *linear system* Σ *of primals has no real points, the primals of* Σ *constitute, in the real field, a «graphic system»; that is, a system abstractly equivalent to that of the primes of a real r-dimensional projective space.*

1. Dopo aver osservato che un classico teorema di H. LEWY [6] poteva tradursi in una proposizione riguardante le curve piane algebriche reali con hessiana priva di punti reali, V. E. GALAFASSI [5] si è occupato delle reti reali di curve piane algebriche a *jacobiana priva di punti reali* dimostrando una proposizione di notevole interesse dalla quale consegue, fra l'altro, il risultato del LEWY.

Precisamente è stato dimostrato che, nelle condizioni indicate, la rete fornisce, in campo reale, un *sistema grafico puro*, secondo una terminologia introdotta poco dopo da B. SEGRE [8].

Nella presente Nota, usando mezzi meno elementari ma egualmente spediti, si estende il risultato ai sistemi lineari ∞^r reali di ipersuperficie algebriche di S_r, con $r \geq 2$, i quali abbiano la jacobiana priva di punti reali. Si riscontra che quest'ultima circostanza richiede, anche negli spazi di dimensione dispari (nei quali la jacobiana è sempre d'ordine pari), che l'ordine delle ipersuperficie del sistema sia dispari. Così la jacobiana di un sistema lineare ∞^r reale di ipersuperficie di ordine pari di S_r, ed in particolare la hessiana di una ipersuperficie d'ordine dispari, è sempre dotata di punti reali.

Si forniscono poi esempi di sistemi a jacobiana priva di punti reali costituiti da ipersuperficie d'ordine dispari comunque prefissato, e si aggiungono infine due osservazioni complementari.

2. Nello spazio S_r (con $r \geq 2$) inteso nel senso della variabilità complessa, sia Σ un sistema lineare ∞^r reale di ipersuperficie algebriche d'ordine n il quale abbia come jacobiana una ipersuperficie J *priva di punti reali.*

In particolare la jacobiana sarà *determinata*; e ciò notoriamente equivale ad affermare (1):

a) *Il sistema* Σ *non è composto con una congruenza lineare* (in particolare *non è composto con un fascio*).

Dall'ipotesi pure consegue immediatamente:

b) *L'eventuale varietà base* (reale) *del sistema* Σ *è priva di punti reali, e tutte le ipersuperficie del sistema sono prive di punti multipli reali.*

Un punto multiplo reale di una ipersuperficie di Σ, in particolare un eventuale punto-base reale del sistema, sarebbe invero un punto reale di J.

Ne scende che una eventuale componente fissa di Σ è priva di parte reale, e pertanto non interviene nella formazione della parte reale delle ipersuperficie del sistema. Si potrà dunque sempre prescindere da eventuali componenti fisse, onde senz'altro supporre, tenendo presente anche la a), che la generica ipersuperficie del sistema sia irriducibile.

Pure si può senz'altro affermare che la parte reale di ogni ipersuperficie reale di Σ è costituita esclusivamente da falde $(r-1)$-dimensionali prive di singolarità, e sono altresì esclusi punti comuni a due eventuali falde distinte di una medesima ipersuperficie.

c) *La varietà-base* V' *di un sistema* Σ' *lineare* ∞^{r-1} *reale di ipersuperficie di* Σ *non contiene infiniti punti reali.*

Se V' (varietà algebrica reale) è, in campo complesso, un gruppo di punti, l'affermazione è ovvia. Negli altri casi, se V' contiene infiniti punti reali, la sua parte reale contiene certamente punti non isolati; ora, se P è punto di una falda k-dimensionale $(1 \leq k \leq r-1)$ di V', una retta tangente in P alla falda è tangente a tutte le ipersuperficie di Σ', cioè a tutte le ipersuperficie di Σ che passano per P, ed allora P sarebbe punto reale della jacobiana (2), la quale invece è per ipotesi priva di punti reali.

Tenuta presente la a), si consideri in S_r la involuzione I_m^r con la quale il sistema Σ è composto, non escludendo peraltro il caso $m = 1$ in cui il sistema è omaloidico (e quindi semplice).

(1) Ad. es. cfr. [1], Cap. X., num. 16.

(2) Ad es. cfr. [1], Cap. X, num. 11, ultimo alinea.

La c) assicura che il gruppo di I_m^r individuato da un punto reale di S_r contiene sempre un numero finito di punti reali; ma inoltre si può affermare:

d) *I gruppi di* I_m^r *individuati dai singoli punti reali di* S_r *contengono sempre lo stesso numero* $\mu \leq \mathrm{m}$ *di punti reali distinti.*

Assunto genericamente in S_r un punto reale P, siano:

$$P \equiv P_1 , \ P_2 , \dots , \ P_\mu$$

i punti reali del gruppo di I_m^r individuato da P. Orbene, al variare di P. i punti P_i si mantengono sempre distinti, perchè se due punti venissero a coincidere in un punto (reale) Q, le ipersuperficie di Σ che passano per Q avrebbero ivi (almeno) una tangente a comune, onde Q sarebbe un punto reale della jacobiana, sempre in contrasto con l'ipotesi.

3. Introdotte in S_r coordinate proiettive omogenee $x_0 , x_1 , \dots , x_r$ (con riferimento reale), sia:

$$\sum_{0}^{m}{}_j \lambda_j \varphi_j(x_0 , \ x_1 , \dots , \ x_r) = 0 \tag{1}$$

l'equazione del sistema Σ, e si supponga, com'è lecito, che le forme φ_j (di grado n linearmente indipendenti) siano a coefficienti reali.

Considerato un secondo spazio S_r' ed introdottovi (sempre con riferimento reale) le coordinate $x_0', x_1', \dots, x_r'$, si ponga tra i due spazî la corrispondenza algebrica Ω:

$$x_0' : x_1' : \dots : x'_r = \varphi_0 : \varphi_1 : \dots : \varphi_r . \tag{2}$$

La Ω è una corrispondenza unirazionale con primo indice m (cfr. num. 2), e reale, la quale subordina tra gli spazi s_r, s_r', parti reali risp. di S_r, S_r' una corrispondenza ω, di indici μ ed 1, localmente topologica (per la continuità delle funzioni algebriche), e priva di elementi di diramazione, in virtù della proprietà d).

Ne viene che ω induce un ricoprimento d'ordine μ dello s_r', essendo lo spazio s_r il complesso ricoprente [3].

Ma allora il gruppo fondamentale F di s_r, gruppo notoriamente d'ordine due, è da ω trasformato isomorficamente in un sottogruppo H' del gruppo fondamentale F' di s_r'; anzi il primo indice μ di ω, che fornisce l'ordine del ricoprimento,

[3] Per la nozione di *ricoprimento* e per alcuni classici risultati al riguardo che verranno qui applicati si fa riferimento al trattato [3], specialmente Cap. VII° e Cap. VIII°.

è altresì l'indice di H' in F'. E siccome anche l'ordine di F' è due, si potranno a priori presentare soltanto due casi: $\mu = 1$, $\mu = 2$.

Il caso $\mu = 2$ si esclude facilmente per il teorema di unicità del complesso ricoprente secondo un ordine assegnato (nel caso attuale secondo l'ordine due). Un ricoprimento d'ordine due dello s_r' si ha invero per proiezione centrografica di una sfera r-dimensionale di un s'_{r+1} sopra un iperpiano s_r' (non passante per il centro della sfera); e si avrebbe allora un omeomorfismo tra la sfera r-dimensionale e lo spazio proiettivo s_r mentre, com'è ben noto, i due complessi non sono omeomorfi.

Si può quindi concludere che $\mu = 1$, ossia che la corrispondenza ω tra s_r ed s_r' è un omeomorfismo, precisamente un omeomorfismo algebrico [4]

Dunque *in* s_r *le ipersuperficie del sistema* Σ *costituiscono un sistema grafico*, un sistema cioè astrattamente assimilabile a quello degli iperpiani di s_r'.

Anzi, tenendo presente che la mancanza di punti reali della jacobiana assicura che ogni ipersuperficie di Σ non presenta accanto alla falda $(r - 1)$-dimensionale omeomorfa ad un iperpiano di s_r' altri punti reali, si ha precisamente *un sistema grafico puro*.

4. Chiamando «spazi subordinati» i sottoinsiemi propri di punti di s_r appartenenti ad una o più ipersuperficie di Σ, si costruisce uno spazio grafico (4), anzi senz'altro uno spazio lineare. Ciò per un qualunque $r \geq 2$; ma per $r \geq 3$ l'ultima affermazione consegue anche altrimenti dalla precedente perchè lo spazio grafico individuato da Σ soddisfa ovviamente al postulato di Fano ed è perciò irriducibile.

Si deve anche osservare che la parte reale di una ipersuperficie (reale) di Σ, omeomorfa a quella di un iperpiano reale di S_r', cioè ad un iperpiano di s_r', è costituita da una sola falda dispari (priva di singolarità). Ne scende che è necessariamente dispari l'ordine n delle ipersuperficie di Σ.

E si può esplicitamente registrare il corollario: *un sistema lineare* ∞^r *reale di ipersuperficie d'ordine pari dello* S_r *ha sempre la jacobiana dotata di punti reali.* Siccome poi la hessiana di una ipersuperficie (d'ordine dispari) dello S_r è notoriamente la jacobiana del sistema lineare ∞^r delle sue prime polari (d'ordine pari), si può anche affermare *che la hessiana di una ipersuperficie algebrica reale d'ordine dispari dello* S_r *è sempre dotata di punti reali.*

Infine conviene accertare che *per qualunque ordine dispari*

(4) Perciò si rinvia al trattato [2], specialmente § 14.

$n = 2h + 1$ $(h \geq 0)$ *esistono sistemi lineari* ∞^r *reali di ipersuperficie algebriche d'ordine* n *dello* S_r *i quali hanno jacobiana priva di punti reali.*

Considerate invero le due forme definite positive

$$A = x^2_0 + x^2_1 + \dots + x^2_{r-1} + x^2_r; \ B = A + x^2_r$$

le $r + 1$ forme:

$$\varphi_0 = x_0 A^h, \ \varphi_1 = x_1 A^h, \dots, \ \varphi_{r-1} = x_{r-1} A^h, \ \varphi_r = x_r B^h$$

hanno come jacobiana una forma definita positiva, come subito si riscontra ([5]).

Oss. I. - Ripresa la trattazione di num. 3, si vuol qui notare come, limitatamente agli spazî di dimensione pari, sia possibile evitare il ricorso alla teoria del «ricoprimento» per dimostrare *che una corrispondenza* ω, *tra* s_r *ed* s_r' (con $r \geq 2$), *d'indici* μ *ed* 1, *localmente topologica e priva di diramazioni, è necessariamente un omeomorfismo* (ossia con $\mu = 1$).

Introdotto in s_r' un complesso reticolante Δ', sia $\alpha_j'(j = 1, 2, \dots, r)$ il numero delle sue celle j-dimensionali. Per le condizioni imposte alla corrispondenza ω, questa trasforma Δ' in un complesso Δ reticolante s_r; inoltre, se α_j è il numero delle celle j-dimensionali di Δ, risulta $\alpha_j = \mu\alpha_j'$.

Se dunque K (risp. K') è la caratteristica euleriana di Δ (risp. di Δ') cioè di s_r (risp. di s_r'), si ha $K = \mu K'$. Ma, per l'invarianza topologica della caratteristica euleriana, è pure $K = K'$, onde senz'altro $\mu = 1$ (essendo $K = K' \neq 0$).

([5]) La jacobiana risulta invero il prodotto della forma $A^{r(h-1)}B^{h-1}$ definita positiva per un determinante che si può scrivere nel modo seguente:

$$\begin{vmatrix} A + 2hx_0^2 & 0 + 2hx_0x_1 & \dots & 0 + 2hx_0x_{r-1} & 0 + 2hx_0x_r \\ 0 + 2hx_1x_0 & A + 2hx^2_1 & \dots & 0 + 2hx_1x_{r-1} & 0 + 2hx_1x_r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 + 2hx_{r-1}x_0 & 0 + 2hx_{r-1}x_1 & \dots & A + 2hx^2_{r-1} & 0 + 2hx_{r-1}x_r \\ 0 + 2hx_rx_0 & 0 + 2hx_rx_1 & \dots & 0 + 2hx_rx_{r-1} & (B + 2hx_r^2) + 2hx_r^2 \end{vmatrix}$$

Questo determinante è somma di più determinanti che si ottengono prendendo in ciascuna colonna i primi ovvero i secondi addendi. Prendendo ovunque i primi addendi si ha una forma definita positiva, prendendo in una sola colonna i secondi addendi si ha una forma semidefinita positiva, prendendo in almeno due colonne i secondi addendi si ottiene un determinante nullo (perchè due sue colonne sono proporzionali). Il determinante sopra scritto è dunque una forma definita positiva.

Per gli spazi di dimensione dispari l'argomentazione cade però in difetto perchè allora, com'è ben noto, le caratteristiche euleriane sono nulle.

Oss. II. - Nella proposizione poc'anzi richiamata l'ipotesi $r \geq 2$ è essenziale.

Il gruppo fondamentale di s_1 (retta proiettiva reale) è invero il gruppo ciclico infinito il quale ammette sottogruppi d'indice qualunque μ, con μ intero e l'infinità numerabile inclusa. Sempre per la teoria del «ricoprimento» lo s_1 ammette dunque ricoprimenti d'ordine μ intero qualunque, infinità numerabile inclusa.

Quest'ultima è però esclusa nelle circostanze attuali per l'algebricità della corrispondenza. Per qualunque intero μ (finito) esistono invece corrispondenze Ω algebriche $(\mu, 1)$ tra S_1 ed S_1' che subordinano tra s_1 ed s_1' corrispondenze ω coi medesimi indici e che pertanto inducono su s_1' un ricoprimento d'ordine μ.

Ad es. basta ricordare (6) che le forme binarie armoniche d'ordine μ comunque prefissato dànno luogo su S_1 ai gruppi di una involuzione I_μ^1 i cui gruppi reali sono tutti costituiti da μ punti reali distinti. La corrispondenza Ω che nasce tra S_1 ed S_1' riferendo proiettivamente i gruppi di I_μ^1 ai punti di S_1' subordina tra s_1 ed s_1' una corrispondenza ω d'indici μ ed 1 del tipo richiesto.

(6) Cfr. B. SEGRE [7], num. 2.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. BERTINI, *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi*, 2ª Ed., Principato, Messina (1923).

[2] B. SEGRE, *Lezioni di Geometria moderna*, vol. 1°, Zanichelli, Bologna (1948).

[3] H. SEIFERT-W. THRELFALL, *Lehrbuch der Topologie*, Teubner, Leipzig-Berlin (1934).

[4] V. E. GALAFASSI, *Omeomorfismi algebrici fra iperspazi reali*, «Rend. Ist. Lomb. (cl. Scienze)», 84 (1951), pp. 130-138.

[5] V. E. GALAFASSI, *Reti reali di curve piane algebriche a jacobiana priva di punti reali*, Ibidem, 90 (1956), pp. 378-382.

[6] H. LEWY, *A property of spherical harmonics*, «American Journ. of Math.», 60 (1938), pp. 555-560.

[7] B. SEGRE, *Questioni di realtà sulle forme armoniche e sulle loro hessiane*, «Rend. Acc. Lincei», (8), 15 (1953), pp. 238-242, 339-344.

[8] B. SEGRE, *Plans graphiques réels non desarguésiens et correspondances crémoniennes topologiques*, «Rev. Math. Pures Appl.», 1 (1956), pp. 35-50.