Bollettino Unione Matematica Italiana

Domingos Pisanelli

Ancora sull'integrazione delle funzioni razionali sotto forma di differenza divisa

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **15** (1960), n.2, p. 120–121.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_2_120_0>

Ancora sull'integrazione delle funzioni razionali sotto forma di differenza divisa.

Nota di DOMINGOS PISANELLI (a S. Paulo)

Sunto. - *L'autore dà un'altra dimostrazione di una formula per l'integrazione delle funzioni razionali sotto forma di differenza divisa.*

Lo scopo di questa piccola nota è di ridimostrare una formola per l'integrazione delle funzioni razionali, che abbiamo dato in una nota di questo «Bollettino» [1]:

$$\int_a^b \frac{P(t)}{Q(t)}\, dt = \overset{m-1}{\triangle} \; P(\alpha) \log (b - \alpha) - \overset{m-1}{\triangle} \; P(\alpha) \log (a - \alpha) \tag{1}$$

dove $P(t)$ e $Q(t)$ sono polinomi di gradi n ed m rispettivamente $n < m$) e il primo coefficiente di $Q(t)$ è uguale ad uno, e la differenza divisa è estesa agli m zeri di $Q(t)$.

In questa nota faremo uso della teoria dei funzionali analitici.

Si dimostra che ([2], p. 404):

$$(2) \qquad \int_a^b f(t)dt = \frac{1}{2\pi i} \int_C \log \frac{b-\alpha}{a-\alpha} f(\alpha)d\alpha$$

dove $f(\alpha)$ è una funzione analitica sulla curva $[a, b]$ e C è una curva chiusa che racchiude internamente e a sinistra i punti di $[a, b]$ ma non quelli dove $f(\alpha)$ è singolare.

Quando $f(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$, siccome il residuo di $f(\alpha) \log \frac{b-\alpha}{a-\alpha}$ all'∞ è nullo, potremo scrivere

$$(2) \qquad \int_a^b f(t)dt = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \log \frac{b-\alpha}{a-\alpha} f(\alpha)d\alpha$$

dove Γ è un'altra curva chiusa che racchiude internamente e a destra gli zeri di $Q(t)$, ma non i punti di $[a, b]$.

Ma il secondo membro di (2) è esattamente la formola che è la differenza divisa di ordine $m-1$ della funzione $f(\alpha) \log \frac{b-\alpha}{a-\alpha}$ ([3], pg. 11) estesa agli m zeri di $Q(t)$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{P(\alpha)[\log(b-\alpha) - \log(a-\alpha)]}{Q(\alpha)} d\alpha =$$

$$= \overset{m-1}{\triangle} P(\alpha)[\log(b-\alpha) - \log(a-\alpha)]$$

donde la 1).

Osserviamo che se lasciamo libero l'estremo superiore b, siccome soltanto il primo termine del secondo membro di (1) contiene b, questo darà una primitiva di $\frac{P(t)}{Q(t)}$ cioè:

$$\int \frac{P(t)}{Q(t)} dt = \overset{m-1}{\triangle} P(\alpha) \log(t-\alpha) + C.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] DOMINGOS PISANELLI, *Sur l' integration des fonctions rationnelles* « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », 1959 (giugno).

[2] PAUL LEVY FRANCO PELLEGRINO, *Problémes concrets d' analyse fonctionnelle.*

[3] MILNE THOMSON. *The calculus of finite differences.*