Giacomo Saban

Sopra alcune curve notevoli.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **15** (1960), n.1, p. 34–37.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_1_34_0>

Sopra alcune curve notevoli.

Nota di GIACOMO SABAN (ad Istanbul).

Sunto - *Si danno due estensioni di una costruzione segnalata da* G. POZZOLO FERRARIS *e che ad una curva sghemba assegnata fa corrispondere un'altra dotata di tangente sempre ortogonale alla congiungente il punto di tangenza col centro di curvatura della curva di partenza.*

Summary - G. POZZOLO FERRARIS *has shown that the tangent to the locus described by any point* P*, *fixed in the osculating plane in* P *of a given skew curve* C *when* P *describes,* C, *stays perpendicular to the straight line obtained by joining* P* *to the center of curvature of* C *in* P.
Two extensions of this result are given here.

1. Per ogni punto P di una qualunque curva sghemba C tracciamo, nel piano osculatore in quel punto, un segmento PP^* di lunghezza costante e formante con la tangente a C in P un angolo costante. Detto C^* il luogo di P^* al variare di P e K il centro di curvatura di C in P, è stato recentemente osservato da G. POZZOLO FERRARIS (1) che la tangente a C^* in P^* si mantiene perpendicolare alla retta congiungente P^* con K. Questo risultato estende una costruzione considerata in precedenza, per sole curve piane, da F. TISSERAND (2).

Scopo della presente Nota è di dare due ulteriori generalizzazioni di questa costruzione.

2. Sia C una qualsiasi curva sghemba e k indichi la retta polare del generico suo punto P. Sia π un piano tangente a C in P, che formi col piano osculatore a C in quel punto l'angolo costante β; infine sia K_π l'intersezione di k con π. Tracciamo ora

(1) GIULIA POZZOLO FERRARIS, *Sopra due curve notevoli*, «Boll. Un. Mat. It.» S. *3*, Anno XII, p. 49, (1957).

(2) F. TISSERAND, *Recueil complémentaire d'Exercices sur le Calcul Infinitésimal*, «Gauthier-Villars», Paris, p. 64-65, (1896 e 1933).

nel piano π un segmento PP_π, di lunghezza λ costante, il quale formi con la tangente a C in P l'angolo costante α.

Introdotti i versori $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ del triedro di FRENET di C in P, se questa ha per raggio vettore $\vec{x} = \vec{x}(s)$, ove s denota l'arco della curva, avremo per il raggio vettore $\vec{x}_\pi$ di P_π

$$\vec{x}_\pi = \vec{x} + \lambda \cos \alpha \, \vec{t} + \lambda \operatorname{sen} \alpha (\cos \beta \, \vec{n} + \operatorname{sen} \beta \, \vec{b}) = \vec{x}_\pi(s).$$

Indicando con $\varkappa$ e τ la flessione e la torsione della curva C in P, dalle formule di FRENET risulta che la tangente della curva C_π, luogo dei punti P_π al variare di P, è diretta come il vettore

$$\frac{d\vec{x}_\pi}{ds} = (1 - \varkappa\lambda \operatorname{sen} \alpha \cos \beta)\vec{t} + (\varkappa\lambda \cos \alpha - \tau\lambda \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta)\vec{n} + \tau\lambda \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \, \vec{b}.$$

Il raggio vettore del punto K_π, $\vec{k}_\pi$, è invece

$$\vec{k}_\pi = \vec{x} + \frac{1}{\varkappa} \vec{n} + \frac{1}{\varkappa} \tan \beta \, \vec{b}$$

e la congiungente P_π con K_π è quindi

$$\vec{x}_\pi - \vec{k}_\pi = \lambda \cos \alpha \, \vec{t} + \left(\lambda \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \frac{1}{\varkappa}\right) \vec{n} +$$

$$\left(\lambda \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta - \frac{1}{\varkappa} \tan \beta\right) \vec{b}$$

per cui risulta

$$\frac{d\vec{x}_\pi}{ds} \cdot (\vec{x}_\pi - \vec{k}_\pi) = 0$$

ossia *la tangente a* C_π *in* P_π *è perpendicolare alla congiungente il punto* P_π *col punto* K_π.

Questo risultato estende la costruzione della POZZOLO FERRARIS, che si ottiene nel caso in cui il piano π si confonda col piano osculatore in P. Se invece π ruota intorno alla tangente fino a superporsi al piano rettificante r, il punto K_π si riduce al punto improprio della retta polare. Contrassegnando con l'indice r gli elementi relativi a questa particolare posizione del piano π, si ottiene che *la tangente in* P_r *ad ogni curva* C_r. *luogo di un punto fisso del piano rettificante di* C, *si mantiene parallela al piano osculatore di* C *in* P.

Si osservi infine che la costruzione segnalata sopra, per $\beta \neq 2/\pi$, si desume per proiezione parallela alla retta polare, da quella considerata nella Nota della POZZOLO FERRARIS.

3. Sia C una qualsiasi curva tracciata su una generica superficie Σ: indicheremo con $\overrightarrow{t}, \overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{\nu}$ rispettivamente i versori della tangente, della normale geodetica e della normale alla superficie nel punto P di C, che sarà tracciata dal raggio vettore $\overrightarrow{x}(s)$. Valgono quindi le formule di derivazione

$$\frac{d\overrightarrow{t}}{ds} = \rho_g \overrightarrow{\gamma} + \rho_n \overrightarrow{\nu}, \quad \frac{d\overrightarrow{\gamma}}{ds} = -\rho_g \overrightarrow{t} + \tau_g \overrightarrow{\nu}, \quad \frac{d\overrightarrow{\nu}}{ds} = -\rho_n \overrightarrow{t} - \tau_g \overrightarrow{\gamma},$$

ove s è ancora l'arco di C mentre ρ_n, ρ_g, τ_g denotano rispettivamente la curvatura normale, la curvatura geodetica e la torsione geodetica di Σ nel punto P nella direzione individuata da $\overrightarrow{t}$.

Consideriamo ancora un piano ω, tangente alla curva C in P e formante col piano tangente di Σ in P l'angolo costante β. Sia K_ω il punto intersezione di questo piano con la retta polare di C in P: questa retta interseca altresì il piano tangente di Σ nel centro di curvatura geodetica G ed il piano normale a Σ per $\overrightarrow{t}$ nel centro di curvatura normale N.

Nel piano ω tracciamo ora un segmento PP_ω di lunghezza λ data, e formante un angolo costante α con la tangente alla curva C in P. *La tangente alla curva* C_ω, *luogo del punto* P_ω *al variare di* P *su* C, *è perpendicolare alla congiungente del punto* P_ω *con* K_ω.

Difatti, indicando con $\overrightarrow{x_\omega}$ il raggio vettore di P_ω, avremo

$$\overrightarrow{x_\omega} = \overrightarrow{x} + \lambda \cos\alpha \overrightarrow{t} + \lambda \operatorname{sen}\alpha (\cos\beta \overrightarrow{\gamma} + \operatorname{sen}\beta \overrightarrow{\nu}) = \overrightarrow{x_\omega}(s)$$

e quindi, derivando rispetto all'arco s di D e tenendo conto delle formule date sopra, avremo

$$\frac{d\overrightarrow{x_\omega}}{ds} = (1 - \rho_g\lambda \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \rho_n\lambda\operatorname{sen}\beta)\overrightarrow{t} + (\rho_g\lambda\cos\alpha - \tau_g\lambda\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)\overrightarrow{\gamma} +$$

$$+ (\rho_n\lambda\cos\alpha + \tau_g\lambda\operatorname{sen}\alpha\cos\beta)\overrightarrow{\nu}.$$

L'intersezione K_ω dell'asse polare di C in P col piano ω è data dal vettore

$$\overrightarrow{k_\omega} = \overrightarrow{x} + \frac{\cos\beta\overrightarrow{\gamma} + \operatorname{sen}\beta\overrightarrow{\nu}}{\rho_g\cos\beta + \rho_n\operatorname{sen}\beta}$$

per cui la congiungente il punto P_ω con K_ω,

$$\overrightarrow{x_\omega} - \overrightarrow{k_\omega} = \lambda\cos\alpha\overrightarrow{t} + \cos\beta\left(\lambda\operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{\rho_g\cos\beta + \rho_n\operatorname{sen}\beta}\right)\overrightarrow{\gamma} +$$

$$+ \operatorname{sen}\beta\left(\lambda\operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{\rho_g\cos\beta + \rho_n\operatorname{sen}\beta}\right)\overrightarrow{\nu}$$

soddisfa alla

$$\frac{d\overrightarrow{x_\omega}}{ds}\cdot(\overrightarrow{x_\omega} - \overrightarrow{k_\omega}) = 0,$$

il che dimostra l'asserto.

Si osservi ancora che la costruzione studiata in quest'ultima parte differisce sostanzialmente da quella esposta nel n. 2, in quanto i piani qui considerati non sono più rigidamente legati al triedro di FRENET della curva di partenza, come lì avviene. Invece i casi particolari che si potrebbero esaminare, supponendo la curva C rispettivamente geodetica o asintotica sulla superficie Σ, sono privi di interesse, in quanto appunto rientrano nell'ambito della costruzione segnalata al n. 2.