
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

SALVATORE RUSSO

Un criterio di convergenza delle serie di polinomi di Legendre.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol.
15 (1960), n.1, p. 20–24.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_1_20_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Un criterio di convergenza delle serie di polinomi di Legendre.

Nota di SALVATORE RUSSO (a Catania)

Sunto. - Generalizzando un risultato precedente, si deduce la convergenza della serie di polinomi di LEGENDRE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$, nel punto $x = x_0$ ($-1 < x_0 < 1$), dalla uniforme limitatezza delle somme parziali della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ in un opportuno arco della circonferenza $|t| = 1$. Come applicazione, si stabilisce la convergenza della serie di polinomi di LEGENDRE nel caso che la successione $\{a_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ sia monotona e limitata.

Summary. - A preceding result is generalized causing the convergency of the set of LEGENDRE's polynomials $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$, in the point $x = x_0$ ($-1 < x_0 < 1$), derived from the uniform limitation of the partial additions of the power-sets $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ in an opportune arch of the circumference $|t| = 1$. As application, the set-convergency of LEGENDRE's polynomials is to be stated in the case the succession $\{a_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ will be monotonous and limited,

1. In un precedente lavoro ⁽¹⁾ ho dimostrato, fra l'altro, il seguente criterio di convergenza delle serie di polinomi di LEGENDRE:

TEOREMA 1°. - La serie di polinomi di Legendre:

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

a coefficienti a_n reali, dove si supponga

$$\rho = 1/\max \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \quad (2),$$

converge in ogni punto x_0 interno all'intervallo $(-1, 1)$, per cui sia convergente la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0 + i\sqrt{1-x_0^2})^n.$$

⁽¹⁾ Cfr. S. RUSSO, Sulla convergenza delle serie dei polinomi di Legendre, « Bull. Acad. royale de Belgique », serie 5ª, Tomo XXXVIII, 1952, pp. 168-175.

⁽²⁾ Se $\rho > 1$, la serie (1) converge uniformemente nell'intervallo chiuso $(-1, 1)$; a proposito si veda loc. citato in ⁽¹⁾.

Inoltre, supposto x_0 soddisfacente a questa ipotesi, la somma della (1) è data dalla formula:

$$S(x_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t, x_0)}{t - x_0} dt$$

dove t è una variabile complessa, γ la circonferenza $|t| = 1$, e $f(t, x_0)$ la somma della serie di potenze:

$$f(t, x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{t^2 - 1}{2(t - x_0)} \right]^n.$$

Mostrerò ora che si può dare a questo teorema una maggiore generalità. Più precisamente vale il

TEOREMA 2°. — Se le somme parziali della serie di potenze

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad (\rho = 1/\max \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1)$$

sono uniformemente limitate in un intorno del punto $t_0 = x_0 + i\sqrt{1 - x_0^2}$, con x_0 interno all'intervallo $(-1, 1)$, la serie (1) converge per $x = x_0$; se inoltre, t_0 risulta interno al campo di esistenza della funzione analitica $f(t)$ generata dall'elemento (2), la somma $S(x_0)$ della (1), nel punto x_0 , è data dalla formula:

$$S(x_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f\left[\frac{t^2 - 1}{2(t - x_0)}\right]}{t - x_0} dt$$

dove γ è ancora la circonferenza $|t| = 1$.

DIM. — Osserviamo dapprima che essendo la (2) a coefficienti reali, le sue somme parziali risultano limitate anche in un intorno del punto $\bar{t}_0$ coniugato di t_0 .

Poniamo $t = \xi + i\eta$, e fissato un numero $\varepsilon > 0$ determiniamo un $\delta > 0$ tale che: 1°) l'intervallo $I \equiv (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ riesca contenuto in $(-1, 1)$; 2°) i tratti L e L' della circonferenza γ :

$$\xi^2 + \eta^2 = 1$$

che si proiettano in I , abbiano lunghezza minore di ε ; 3°) quando ξ varia in I , per i corrispondenti punti di γ si abbia $|\eta| \geq h$, con h positivo.

Si avrà allora per i punti t contenuti in $\gamma - L - L'$:

$$(3) \quad \left| \frac{t^2 - 1}{2(t - x_0)} \right|^2 = 1 - \frac{(\xi - x_0)^2}{|t - x_0|^2} \geq 1 - \left(\frac{\delta}{1 + |x_0|} \right)^2$$

e per $t \in L$ o $t \in L'$:

$$(4) \quad \left| \frac{t^2 - 1}{2(t - x_0)} \right| \leq 1, \quad |t - x_0| \geq h.$$

Scegliendo ε sufficientemente piccolo, si può determinare, per l'ipotesi fatta, un numero M tale che risulti:

$$(5) \quad |S_n(t)| \leq M, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \quad S_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k,$$

per t variabile in ognuno dei tratti L e L' .

Ciò posto, tenendo presente che per la formula di SCHLÄFLI, si ha:

$$P_n(x_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(t^2 - 1)^n}{2^n t - x_0^{n+1}} dt$$

risulta:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=m+1}^{m+p} a_n P_n(x_0) \right| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n \left[\frac{t^2 - 1}{2(t - x_0)} \right]^n}{t - x_0} dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma - L - L'} \frac{\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n \left[\frac{t^2 - 1}{2(t - x_0)} \right]^n}{t - x_0} dt \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{L+L'} \frac{\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n \left[\frac{t^2 - 1}{2(t - x_0)} \right]^n}{t - x_0} dt \right| \end{aligned}$$

da cui, per le (3), (4) e (5), si deduce per m sufficientemente grande:

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} a_n P_n(x_0) \right| \leq \frac{\varepsilon}{1 - |x_0|} + \frac{2M\varepsilon}{\pi h} = \left(\frac{1}{1 - |x_0|} + \frac{2M}{\pi h} \right) \varepsilon.$$

Quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x_0)$ è convergente.

Se il punto $t_0 = x_0 + i\sqrt{1 - x_0^2}$ è interno al campo di esistenza della funzione $f(t)$, anche $\bar{t}_0$ appartiene a questo campo (per aver supposto la (1) a coefficienti reali), e perciò scegliendo ε sufficientemente piccolo ed M eventualmente più grande, si avrà per t variabile in ciascuno dei tratti L e L' :

$$(6) \quad |f(t)| \leq M.$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=0}^m a_n P_n(x_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} t \frac{\left[\frac{t^2 - 1}{2(t - x_0)} \right]}{t - x_0} dt \right| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{\sum_{n=0}^m a_n \left[\frac{t^2 - 1}{2(t - x_0)} \right]^n - f\left[\frac{t^2 - 1}{2(t - x_0)} \right]}{t - x_0} dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma-L-L'} \frac{\sum_{n=0}^m a_n \left[\frac{t^2 - 1}{2(t - x_0)} \right]^n - f\left[\frac{t^2 - 1}{2(t - x_0)} \right]}{t - x_0} dt \right| + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \left| \int_{L+L'} \frac{\sum_{n=0}^m a_n \left[\frac{t^2 - 1}{2(t - x_0)} \right]^n - f\left[\frac{t^2 - 1}{2(t - x_0)} \right]}{t - x_0} dt \right|, \end{aligned}$$

donde per le (3), (4), (5) e (6) deduciamo per m sufficientemente grande:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=0}^m a_n P_n(x_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} t \frac{\left[\frac{t^2 - 1}{2(t - x_0)} \right]}{t - x_0} dt \right| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{1 - |x_0|} + \frac{2M\varepsilon}{\pi h} = \left(\frac{1}{1 - |x_0|} + \frac{2M}{\pi h} \right) \varepsilon. \end{aligned}$$

Dunque avremo :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x_0) = \int_{\gamma} t \frac{\left[\frac{t^2 - 1}{2(t - x_0)} \right]}{t - x_0} dt.$$

2. Come applicazione del criterio di convergenza sopra esposto abbiamo il seguente

TEOREMA 3°. - *La serie di polinomi di Legendre :*

$$(7) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

è convergente per ogni x interno all'intervallo $(-1, 1)$ se la successione $\{a_n\}_{n=0, 1, 2, \dots}$ è monotona limitata.

Dim. - Infatti, posto

$$s_k = 1 + t + \dots + t^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

risulta, per ogni $t \neq 1$ della circonferenza $|t| = 1$:

$$|s_k| = \left| \frac{1 - t^k}{1 - t} \right| \leq \frac{2}{|1 - t|}.$$

Ne segue, supponendo che la $\{a_n\}_{n=0, 1, 2, \dots}$ sia non decrescente :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{k-1} a_n t^n \right| &= |(a_0 - a_1)s_1 + (a_1 - a_2)s_2 + \dots + (a_{k-2} - a_{k-1})s_{k-1} + a_{k-1}s_k| \leq \\ &\leq \frac{2}{|1 - t|} \{ (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \dots + (a_{k-1} - a_{k-2}) + |a_{k-1}| \} \leq \\ &\leq \frac{2}{|1 - t|} \{ |a_0| + 2|a_{k-1}| \} \end{aligned}$$

donde, per le ipotesi fatte e per il teorema 2°, segue la convergenza della (7) in tutti i punti interni all'intervallo $(-1, 1)$.