Bollettino Unione Matematica Italiana

T. Peyovitch

Quelques théorèmes élémentaires des intégrales généralisées et leurs applications.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **15** (1960), n.1, p. 1–6.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_1_1_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1960.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Quelques théorèmes élémentaires des intégrales généralisées et leurs applications.

Nota di T. Peyovitch (a Belgrado)

Résumé. - *Il s'agit de l'existence de solution asymptotique d'une classe d'équations differentielles.*

1. Soit $f(x)$ une fonction intégrable pour $x \geq x_0 > 0$, $\varphi(x)$ une fonction positive et monotone.

A) *Si l'on a*

$$\int_x^\infty f(t)dt = 0(1), \ \varphi(x) \to \infty \qquad \textit{pour } x \to \infty, \tag{1}$$

on aura

$$\varphi(x)\int_x^\infty \frac{f(t)}{\varphi(t)}dt = 0(1) \qquad \textit{pour } x \to \infty. \tag{2}$$

Dans les recherches suivantes nous supposons que la fonction $\varphi(x)$ admet la dérivée $\varphi'(x)$ intégrable pour $x \geq x_0 > 0$.

Considérons l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} y + f(x) + \psi(x, y) \tag{3}$$

ou sous la forme de l'équation intégrale

$$(4) \qquad y = \varphi(x)\left[\int_{x_1}^{x} \frac{f(x)}{\varphi(x)}\,dx + C_1\right] + \varphi(x)\int_{x_0}^{x} \frac{\psi(x,\ y)}{\varphi(x)}\,dx,$$

où les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ satisfont aux conditions du théorème A. La fonction $\psi(x,\ y)$ est définie et continue pour $|y| < B$ et pour la variable réelle $x \geq x_0 > 0$, satisfaisante aux conditions

$$(5) \qquad \psi(x,\ 0) = 0,\ |\psi(x,\ Y) - \psi(x,\ y)| \leq \lambda(x)\,|\,Y - y\,|$$

où $\lambda(x)$ est une fonction positive et intégrable avec la condition

$$(6) \qquad \int_{x}^{\infty} \lambda(x)dx = 0(1) \qquad \text{pour } x \to \infty.$$

L'équation (4) laquelle admet une solution asymptotique bornée est de la forme

$$(7) \qquad y = -\,\varphi(x)\int_{x}^{\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)}\,dx - \varphi(x)\int_{x}^{\infty} \frac{\psi(x,\ y)}{\varphi(x)}\,dx.$$

En appliquant la méthode des approximations successives de Picard, à l'équation (7) on obtiendra

$$(8) \qquad y_n = y_0 - \varphi(x)\int_{x}^{\infty} \frac{\psi(x,\ y_{n-1})}{\varphi(x)}\,dx.$$

Pour $n = 1$ l'équation ci-dessus, d'aprés (5), donne

$$(9) \qquad |\,y_1 - y_0\,| \leq \varphi(x)\int_{x}^{\infty} \frac{\lambda(x)}{\varphi(x)}\,|\,y_0\,|\,dx \leq M\varphi(x)\int_{x}^{\infty} \frac{\lambda(x)}{\varphi(x)}\,dx = M\varepsilon(x) \leq M\varepsilon$$

$$\varepsilon = \max \varepsilon(x) \qquad \text{pour } x \geq x_0 > 0.$$

Pour $n = 2$ l'équation (8), d'aprés (5) e (9), donne

$$| y_2 - y_1 | \leq \varphi(x) \int_x^\infty \frac{\lambda(x)}{\varphi(x)} | y_1 - y_0 | \, dx \leq M\varepsilon \cdot \varepsilon(x) \leq M\varepsilon^2$$

Continuant ainsi de suite, on obtiendra

$$| y_n - y_{n-1} | \leq M\varepsilon^n.$$

Si l'on a

$$\varepsilon < 1, \quad \frac{M}{1-\varepsilon} < B \tag{10}$$

la serie

$$y = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (y_n - y_{n-1})$$

converge uniformément pour $x \geq x_0 > 0$ et représente la solution de l'équation (3).

B. *L'équation* (3) *admet, pour* $x \geq x_0 > 0$, *une solution asymptotique bornée sous les conditions* (1), (5), (6) *et* (10).

Pour

$$\varphi(x) = e^{rx}, \qquad r > 0$$

l'équation (3) devient

$$\frac{dy}{dx} = ry + f(x) + \psi(x, y)$$

laquelle est bien étudiée.

2. Considérons l'équation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} y + f(x) + \psi(x, y) \tag{11}$$

ou sous la forme de l'équation intégrale

$$y = \frac{1}{\varphi(x)} \left[\int_{x_0}^{x} \varphi(x) f(x) dx + C_1 \right] + \frac{1}{\varphi(x)} \int_{x_0}^{x} \varphi(x) \psi(x, y) dx$$

C. *Si l'on a*

$$\int_x^\infty \varphi(t)f(t)dt = O(1), \quad \int_x^\infty \varphi(t)\lambda(t)dt = O(1) \tag{12}$$

$$\varphi(x) \to \infty \qquad \text{pour} \qquad x \to \infty$$

l'équation (11) *admet, pour* $x \geq x_0 > 0$, *une solution asymptotique bornée dépendante d'un paramètre arbitraire* (*constante d'intégration*) *sous les conditions* (5), (10) et (12).

Pour

$$\varphi(x) = e^{rx}, \ r > 0$$

l'équation (11) devient

$$\frac{dy}{dx} = -ry + f(x) + \psi(x, y).$$

La démonstration est la même que dans le cas précédent.

3. D. *Si l'on a*

$$\int_x^\infty f(t)dt = 0(1), \ \varphi(x) \to 0 \ \text{pour} \ x \to \infty, \tag{1'}$$

on aura

$$\frac{1}{\varphi(x)}\int_x^\infty \varphi(t)f(t)dt = 0(1) \ \text{pour} \ x \to \infty. \tag{2'}$$

Considérons l'équation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}y + f(x) + \psi(x, y) \tag{13}$$

ou sous la forme de l'équation intégrale

$$y = \frac{1}{\varphi(x)}\left[\int_{x_0}^x \varphi(x)f(x)dx + C_1\right] + \frac{1}{\varphi(x)}\int_{x_0}^x \varphi(x)\psi(x, y)dx. \tag{14}$$

L'équation (14) laquelle admet une solution asymptotique bornée est de la forme

$$y = -\frac{1}{\varphi(x)}\int_x^\infty \varphi(x)f(x)dx - \frac{1}{\varphi(x)}\int_x^\infty \varphi(x)\psi(x,\ y)dx.$$

E. *L'équation* (13) *admet, pour* $x \geq x_0 > 0$, *une solution asymtotique bornée, sous les conditions* ~~(1')~~, (5), ~~(6) *et*~~ (10)~~.~~

La démonstration est la même que dans le cas du numéro 1. Pour

$$\varphi(x) = e^{rx}, \quad r < 0$$

l'équation (13) devient

$$\frac{dy}{dx} = -ry + f(x) + \psi(x,\ y).$$

4. Considérons enfin l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}y + f(x) + \psi(x,\ y) \tag{15}$$

ou sous la forme de l'équation intégrale

$$y = \varphi(x)\left[\int_{x_0}^x \frac{f(x)}{\varphi(x)}dx + C_1\right] + \varphi(x)\int_{x_0}^x \frac{\psi(x,\ y)}{\varphi(x)}dx.$$

F. *Si l'on a*

$$\int_x^\infty \frac{f(t)}{\varphi(t)}dt = O(1), \quad \int_x^\infty \frac{\lambda(t)}{\varphi(t)}dt = O(1), \tag{16}$$

$$\varphi(x) \to 0 \quad \text{pour} \quad x \to \infty,$$

l'équation (15) *admet, pour* $x \geq x_0 > 0$, *une solution asymptotique bornée dépendante d'un paramètre arbitraire (constante d'intégration) sous les conditions* (5), (10) et (16).

Pour

$$\varphi(x) = e^{rx}, \ \ r < 0$$

l'équation (15) devient

$$\frac{dy}{dx} = ry + f(x) + \psi(x, y).$$

Tous ces théorèmes peuvent s'étendre au système d'équations.