UMI

Recensioni.

* G. Fichera, Premesse ad una teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali, Libreria Eredi V., Roma (Carlo Miranda)
* Lamberto Cesari, Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations, Springer Verlag, Berlin, 1959 (Dario Graffi)
* Silvio Vianelli, Prontuari per calcoli statistici: Tavole numeriche e complementi, Abbaco, Palermo-Roma e Edizioni Calderini, Bologna, 1959 (Giuseppe Varoli)
* Alexandru Myller, Scrieri Matematice, Editura Academiei R.P.R., Bucaresti, 1958 ((Adolf Haimovici)
* J.-P. Serre, Groupes algébriques et corps de classes, Hermann, Paris, 1959 (Iacopo Barsotti)
* J. Mikusinski, Operatorenrechnung, Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957 (Aldo Ghizzetti)
* M. Louis de Broglie, La théorie de la mesure en mecanique ondulatoire, Gauthier-Villars, Paris, 1959 (Mario Verde)
* A. Khintchine, Kettenbrüche, n. 3, Teubner, Leipzig (Marco Cugiani)
* Seminaire de Théories Physique dirigé par Mr. Louis de Broglie, Vol. I 1955, Vol. II 1956, Vol. III 1957, Secrétariat mathématique, Paris (Mario Verde)
* L. Holzer, Zahlentheorie, Teubner, Leipzig, 1958-1959 (Marco Cugiani)
* W. Heisenberg, E. Schrödinger, M. Born, P. Auger, Discussione sulla Fisica Moderna, Einaudi, Torino, 1959 (Mario Verde)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.4, p. 568–582.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_4_568_0>

RECENSIONI

G. FICHERA - *Premesse ad una teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali,* Corsi dell' Istituto Nazionale di Alta Matematica, Edizione litografica della Libreria Eredi V. Roma, pagg. 292 + III.

Negli ultimi due o tre lustri l'applicazione sistematica dei metodi dell'Analisi funzionale ha permessa un'imponente ripresa delle ricerche relative ai problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali. Nel quadro dei risultati ottenuti in questo ordine di idee il contributo dato dai lavori di Gaetano Fichera (1) appare veramente pregevole e improntato ad una veduta d'insieme del problema spiccatamente originale. In questo volume (2) che riassume, ma oltrepassa anche di molto, le lezioni di un corso tenuto dall'A. presso l'Istituto Nazionale di Alta Matematica nel 1956-57 il Fichera ha voluto esporre in forma piana e sistematica i principi generali a cui egli si è ispirato nelle sue più recenti ricerche e i risultati ottenuti nello studio di alcuni particolari problemi. Egli ha compiuto in tal modo opera altamente meritoria perchè attraverso la lettura di questo libro i giovani potranno impadronirsi di un metodo generale per lo studio dei problemi al contorno, le cui possibilità di applicazione sono ben lungi dall'essere esaurite.

Questo per quanto riguarda l'interesse didattico del volume; è però da aggiungere che in esso hanno trovato posto anche molti risultati nuovi, che vengono qui pubblicati per la prima volta e che rendono questo libro altamente interessante anche da un punto di vista puramente scientifico. È infine da rilevare che un lettore un po' smaliziato potrà trovare nella lettura di quest'opera molti utili suggerimenti in vista dell'impostazione di nuove ricerche su molte questioni tutt'ora aperte Tutto ciò risulterà meglio dall'analisi dettagliata dei tre capitoli del volume.

Nel Capitolo I sono esposti, insieme a varie premesse, il metodo generale di cui si è valso l'A. nei suoi lavori e i principi di analisi funzionale su cui esso si basa. Dopo aver dato la nozione di prolungamento debole di un operatore differenziale lineare, nel senso di Friedrichs e Sobolev, il Fichera generalizza ancora tale nozione e se ne vale per definire il concetto di solu-

(1) Limitandoci a ricordare i lavori più recenti e che ci occorrerà richiamare nel seguito citeremo: *a*) *Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali,* Atti del Convegno Inter. sulle equaz. a der. parz. di Trieste, 1954; *b*) *Su un principio di dualità per talune formule di maggiorazione relative alle equazioni differenziali,* Rend. Acc. Naz. Lincei, 1955; *c*) *Sulla teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari,* Rend. Acc. Naz. Lincei, 1955; *d*) *Sulle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine ellittico-paraboliche,* Univ. e Polit., di Torino, Rend. Sem. Mat., 1955-56; *e*) *Sulle equazioni differenziali lineari ellittico-paraboliche del secondo ordine,* Mem. Acc. Naz. Lincei, 1956.

(2) Redatto dai Dott. L. Bassotti e L. de Vito.

zione debole [3] di un problema al contorno. Questa definizione è molto generale perchè vale per qualunque problema al contorno relativo ad equazioni di qualsiasi ordine e tipo; naturalmente essa può variare a seconda del tipo di prolungamento adottato per l'operatore differenziale a primo membro dell'equazione. Poste queste premesse l'A. passa ad illustrare un principio di esistenza per le soluzioni di una certa equazione funzionale astratta in uno spazio di Banach, principio che costituisce lo strumento essenziale delle sue ricerche. Non possiamo qui entrare in dettagli su tale teorema, del resto ben noto al pubblico matematico italiano; ci basterà dire che esso, stabilito dal Fichera fin dal 1954 [4], contiene come casi particolari sia il teorema di Hahn-Banach che il teorema della proiezione in uno spazio hilbertiano, che ancora il teorema di rappresentazione di Lax e Milgram. Valendosi di tale principio si dimostra poi che condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una soluzione debole di un problema al contorno è che per le soluzioni di un certo sistema aggiunto valga un'opportuna formula di maggiorazione. La rimanente parte del Cap. I è dedicata allo studio delle funzioni di una certa classe e delle loro tracce sulla frontiera e alle nozioni di prolungamento semidebole di un operatore differenziale e di soluzione semidebole di un problema al contorno.

Nel Cap. II il metodo generale esposto nel Cap. I viene applicato allo studio dei problemi al contorno per le equazioni ellittico-paraboliche del secondo ordine, problemi questi già ampiamente investigati dal Fichera nei lavori *d*) ed *e*) citati nella nota (1). Senza fare alcuna ipotesi particolare sulle giaciture caratteristiche dell'equazione e senza neppure escludere il caso che essa sia del primo ordine, si caratterizzano dapprima i problemi al contorno che possono porsi per le soluzioni di tali equazioni e si determinano poi, col metodo indicato nel Cap. I, le formule di maggiorazione per le soluzioni del problema aggiunto la cui validità è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di soluzioni deboli del problema considerato. Si passa infine ad investigare sotto quali ipotesi tali formule di maggiorazione siano effettivamente valide. E qui l'A. amplia di molto i risultati ottenuti nei lavori già citati, stabilendo tutta una serie di nuove formule di maggiorazione. Per questo egli si vale di un principio di dualità, relativo a talune formule di maggiorazione, da lui stabilito nella nota *b*) citata in (1) e che è anch'esso conseguenza del principio di analisi funzionale di cui si è precedentemente discorso. In tal modo la validità delle formule di maggiorazione occorrenti per dimostrare i teoremi di esistenza relativi ai problemi al contorno considerati viene ad essere subordinata, sotto certe condizioni, al fatto che un certo sistema di funzioni, definite su di una parte della frontiera del campo, costituisca una base in un certo spazio funzionale. Così la trattazione del Fichera, mentre può utilmente essere presa a modello per lo studio con analoghi procedimenti di altri problemi, apre di per sè la via a tutta una serie di nuove ricerche aventi lo scopo di stabilire, anche per il solo problema considerato, sotto quali ipotesi la predetta condizione sia verificata; i risultati che potessero ottenersi in questa direzione contribuirebbero molto efficacemente ad una sistemazione definitiva dello studio di questi problemi.

Il Cap. III infine è dedicato al problema della regolarizzazione delle soluzioni deboli, questione questa molto difficile che l'A. affronta soltanto nel caso che l'equazione sia del primo ordine. In sostanza si tratta di stabilire sotto quali condizioni una soluzione debole sia dotata di derivate parziali forti (nel senso di Friedrichs) o addirittura di derivate in senso ordinario, per modo che essa possa considerarsi come soddisfacente all'equazione puntualmente, ovunque o quasi ovunque nel campo. Questo problema involve

(3) Le definizioni adottate in proposito dal Fichera si differenziano in parte da quelle usuali; vedi su ciò il lavoro *c*) citato in (1).
(4) Vedi il lavoro *a*) citato in (1).

varie delicate questioni di teoria delle funzioni di variabili reali che hanno condotto l'A. allo studio di certe classi di funzioni di più variabili da lui dette a variazione limitata e, in certi casi particolari, assolutamente continue. Queste classi di funzioni possono essere definite in vari modi onde si pone il problema del confronto delle varie definizioni possibili sia fra di loro che con quelle classiche di Tonelli e Cesari. Altre questioni interessanti si presentano nello studio dell'esistenza e delle proprietà delle derivate o, più generalmente, degli operatori differenziali del primo ordine di tali funzioni. Ed è questo un altro punto del volume in cui per la novità dei risultati l'interesse scientifico prevale su quello didattico anche perchè la trattazione svolta suggerisce varie ricerche tuttora aperte, quali lo studio della regolarizzazione alla frontiera, la ricerca di altre proprietà di regolarità nell'interno del campo, lo studio delle stesse questioni per le equazioni del secondo ordine.

In conclusione vogliamo sottolineare che, per la felice gradualità con cui il lettore viene condotto, dallo studio di questioni oramai ben sistemate direttamente nel vivo di ricerche ancora aperte, questo volume, nato si può dire nell'Istituto Nazionale di Alta Matematica, ben corrisponde ai fini che questo Istituto si propone.

CARLO MIRANDA

LAMBERTO CESARI, *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*, Springer Verlag, Berlin, 1959.

Il problema della stabilità del movimento ha attirato da molto tempo l'interesse degli studiosi, basterà ricordare, per limitarci ai più celebri, Poincaré, Levi-Civita, Lyapunov. Ma, in questi ultimi anni, specie in seguito allo sviluppo della meccanica non-lineare, sono notevolmente moltiplicate le ricerche sulla stabilità del movimento e sui problemi collegati del comportamento asintotico delle soluzioni di equazioni differenziali. Quindi assai opportuno appare il presente trattato del prof. Cesari dove, in una sintesi veramente ottima (il volume consiste di duecentosessantasei pagine di cui settanta dedicate ad una amplissima e aggiornatissima bibliografia ben commentata nel testo), si raccolgono non solo i risultati classici e recentissimi sull'argomento indicato nel titolo del libro, ma quest'ultimo contiene anche, nei suoi sviluppi essenziali, la meccanica non-lineare.

Il volume in esame ha indirizzo prevalentemente matematico, ma l'Autore non si tiene però discosto dalle applicazioni perchè indica spesso, delle equazioni e dei teoremi da lui esposti, il significato fisico o tecnico. Inoltre non evita di segnalare i procedimenti utili al matematico applicato per risolvere problemi concreti. Ad esempio, mentre molti trattati si limitano ad osservare che per sistemi retti da equazioni lineari a coefficienti costanti la stabilità è assicurata qualora le radici di una equazione algebrica abbiano parte reale negativa, nel presente volume sono indicati anche criteri per verificare quella proprietà delle radici, e non solo il criterio di Hurwitz che diventa troppo complicato se il grado dell'equazione è alto, ma anche altri criteri, in particolare quello di Nyquist che, pur molto usato dai tecnici, di raro si trova esposto in un testo di matematica.

Passiamo ora ad esporre, molto brevemente, il contenuto del libro.

Nel I capitolo, dopo qualche richiamo sulle equazioni differenziali, si introduce e si discute il concetto di stabilità secondo Lyapunov e gli altri concetti di stabilità, soffermandosi in particolare sulla stabilità orbitale. Segue la trattazione approfondita, come già accennato, della stabilità per i sistemi lineari a coefficienti costanti; viene esposta anche la teoria dei servomeccanismi importantissima, come è ben noto, nella tecnica moderna.

Il II capitolo è dedicato principalmente allo studio e comportamento asintotico delle soluzioni di equazioni o sistemi lineari con coefficienti variabili; la letteratura sull'argomento è enorme, ma l'Autore riesce a sintetizzarla in modo veramente felice. Ovviamente, molte pagine sono dedicate a equazioni o sistemi con coefficienti periodici; merita particolare attenzione il metodo sviluppato dall'Autore e dalla sua scuola per determinare gli esponenti caratteristici nel caso (che spesso si presenta in pratica) in cui i termini variabili siano piccoli; il metodo ha permesso di ottenere importanti risultati specie nel campo (ancora poco studiato) dei sistemi di equazioni di secondo ordine.

Il III capitolo è dedicato alle equazioni e ai sistemi non lineari. I primi paragrafi contengono i due metodi di Lyapunov per lo studio generale della stabilità e i numerosi lavori che, a quei metodi, si collegano direttamente o indirettamente. Poichè la ricerca della stabilità si presenta di particolare interesse a proposito delle soluzioni per le equazioni periodiche della meccanica non-lineare, l'Autore passa ad esporre i metodi che permettono di dimostrare l'esistenza e studiare la stabilità di quelle soluzioni, sia per equazioni non dipendenti esplicitamente dal tempo (caso dei sistemi autonomi) sia esplicitamente dipendenti dal tempo (caso dei cosiddetti sistemi non autonomi, ossia dei problemi di sincronizzazione, demoltiplicazione di frequenza, ecc.). I metodi in discorso sono o di tipo topologico o di tipo analitico; questi ultimi, validi specialmente per debole non linearità, sono importanti anche dal punto di vista pratico perchè permettono di ottenere, in via approssimata, l'espressione concreta della soluzione periodica. L'Autore a questo proposito ricorda non solo i metodi ormai classici (di Lindstedt, di Poincaré, di Krylov-Bogoliubov, ecc.) ma anche quello sviluppato da lui e dai suoi allievi che, in modo rigoroso e relativamente semplice, permette di ottenere soluzioni periodiche per equazioni o per sistemi relativi sia al caso autonomo che a quello non autonomo.

L'ultimo capitolo è dedicato principalmente agli sviluppi asintotici, sia rispetto alla variabile indipendente sia rispetto ad un parametro, delle soluzioni di equazioni differenziali lineari, argomento questo di particolare interesse specie nella fisica teorica; non manca però un largo cenno alla teoria delle perturbazioni singolari di grande importanza per lo studio di sistemi fortemente non lineari.

L'esposizione è concisa, ma sempre chiara. Esempi scelti opportunamente rendono evidenti diverse affermazioni. Ovviamente molti teoremi sono enunciati senza dimostrazione, non mancano però quelle dei teoremi più importanti che, opportunamente collegate fra loro, permettono al lettore di rendersi conto, almeno nelle linee essenziali, della teoria delle stabilità e problemi affini.

Poichè qualche nozione un pò specializzata (ad esempio la teoria delle matrici applicata alle equazioni differenziali) è esposta nel volume in esame, la sua lettura richiede solo la cultura matematica impartita nei nostri bienni.

Si può perciò affermare, concludendo, che il trattato del Cesari sarà di grande utilità a tutti gli studiosi che intendono aggiornarsi, o compiere ricerche, su un importante ramo della matematica moderna.

DARIO GRAFFI

SILVIO VIANELLI, *Prontuari per calcoli statistici: Tavole numeriche e complementi.* Abbaco, Palermo-Roma e Edizioni Calderini, Bologna (1959) (formato 23x29; pp. XVI + 1544; Lit. 16.000).

Veramente monumentale quest'opera che colma una lacuna particolarmente sentita nell'ambito nazionale.

Il volume e diviso in due parti La prima « *Tavole numeriche* » (pp 1083) raccoglie ben 300 tavole, indicate col termine « Prontuari », che riguardano i piu differenti problemi attinenti alle seguenti materie, le quali, in fondo al volume, trovano un dettagliatissimo indice analitico 1) Analisi delle distribuzioni statistiche 2) Analisi delle serie storiche 3) Relazioni statistiche tra gruppi di osservazioni 4) Criteri ed indici di significativita statistica 5) Metodologia e tecnica dei piani di sperimentazione 6) Metodologia e tecnica dei campioni 7) Calcoli numerici 8) Calcoli finanziari ed attuariali 9) Problemi di ricerca operativa

La seconda « *Complementi, nozioni e regole per l'uso delle tavole numeriche* » (pp 413 su due colonne), oltre all'importantissimo ufficio di mettere in grado chiunque, col minimo di fatica di potersi impadronire della tecnica dei singoli prontuari, puo in molti casi considerarsi un trattato in sintesi di argomenti attinenti ai singoli prontuari o con essi in relazione La chiarezza, pur nella dovuta concisione e rimarchevole, denotando estrema padronanza della materia e degli algoritmi Magistrale l'articolo « Errori ed approssimazioni nelle analisi statistiche » (pp 25), vero capitolo introduttivo di questa parte, nella quale figurano anche 263 prospetti che, per distinzione dai precedenti, sono indicati col termine « Tavole » Queste tavole rappresentano normalmente basi per trarne esempi d'applicazione dei prontuari, ma qualche volta sono veri e propri prontuari complementari di quelli della parte prima

Gli « Indici e fonti delle tavole numeriche » (pp 39), che si trovano in fondo al volume — necessario e fondamentale completamento di tutta l'opera — comprendono l indice della parte prima, cioe l elenco numerico e per titoli dei 300 prontuari, l'indice della parte seconda, cioe l elenco numerico dei prontuari in relazione alle spiegazioni fornite per l uso di ciascun prontuario o gruppi di prontuari, gli indici dei nove gruppi di materie precedentemente elencate, distinguendo analiticamente per ciascun gruppo, secondo l'ordine alfabetico, gli argomenti attinenti (questi indici analitici sono utilissimi direi indispensabili, perche permettono di individuare subito il prontuario o i prontuari riguardanti l argomento che interessa), l indice alfabetico degli Autori citati, l'indice delle fonti da cui provengono i prontuari stessi

L'opera, per la sua mole non poteva essere l'opera di un solo, l'A fa rilevare nella prefazione che essa e il risultato di un lungo e fecondo lavoro di una « equipe » formata da un gruppo di collaboratori e allievi della Scuola di Statistica di Palermo da Lui diretti Questo rappresenta un esempio che va considerato molto seriamente, non essendo certo frequente trovarne uno analogo in Italia nell ambiente scientifico

Il volume raccoglie le piu recenti ed importanti tavole numeriche apparse in pubblicazioni estere (chi conosce le difficolta che si incontrano anche solo nel venire a conoscenza dell'esistenza di tali pubblicazioni e in grado di apprezzare il grande vantaggio di trovarne tante riunite) e tavole numeriche esistenti in varie pubblicazioni italiane, presenta inoltre ben 39 prontuari inediti, costruiti dalla Scuola di Statistica di Palermo, la quale ha provveduto anche ad estendere e ad integrare alcune delle tavole numeriche riportate

L'indice per gruppi di materie e sufficiente di per se a dare un idea della varieta dei problemi, anche i piu moderni, che si possono risolvere con l ausilio dei 300 prontuari, oggi praticamente indispensabili non solo agli statistici ed agli operatori economici, ma anche ai cultori delle piu varie discipline tecniche e sperimentali dagli ingegneri ai medici, dai chimici ai biologi, dai fisici agli agronomi, dai naturalisti ai psicologi, ecc

Per dare solo qualche esempio particolarmente significativo, specie nell ambito della tecnica, si possono ricordare i prontuari che hanno attinenza con calcoli statistici riguardanti la fisica nucleare l impiego di particolari funzioni aleatorie in meteorologia ed in oceanografia per le previsoni meteorologiche, valori estremi di taluni distribuzioni di probabilita per la previ sione di secche, di piene ed altri fenomeni in relazione con la costruzione di ponti, di dighe ed impianti idroelettrici ecc.

Osserva l'A. nella prefazione che « *Il progresso tecnico ed economico delle società umane si è rapidamente accelerato negli ultimi decenni, da quando scienze antiche e moderne hanno manifestato una decisa evoluzione verso la fase quantitativa, mentre ricercatori, sperimentatori, tecnici ed operatori economici — ritenendo sempre più insufficienti l'intuizione individuale e la deduzione qualitativa — sono stati ineluttabilmente indotti a prendere decisioni riguardanti scelte coscienti fra più soluzioni possibili, sulla base di* espressioni numeriche *dei fatti* ».

Ciò, innegabilmente, ha portato al moderno grande sviluppo e alla grande diffusione di macchine calcolatrici di ogni tipo, dalle calcolatrici elettriche ai grandi « cervelli elettronici », senonchè è raro che un ricercatore, o un tecnico, o uno studioso, non appartenente a qualche grande complesso industriale o ad un istituto scientifico particolarmente attrezzato, possa disporre di tali macchine. Tavole numeriche così vaste e complete come queste del VIANELLI presentano indubbiamente uno strumento altamente qualificato e utilizzabile molto semplicemente da chiunque, anche nel chiuso del proprio studio, col vantaggio di avere spesso, per semplice lettura, il dato che interessa.

Il volume si presenta in elegante veste tipografica, solidamente rilegato in tutta tela, la stampa è nitidissima, i prontuari molto chiari e di facile lettura, essendo le colonne numeriche sufficientemente distanziate — grazie al grande formato del volume — e l'interlineatura ben marcata.

È allegata al volume una « errata-corrige », indispensabile in una prima edizione di un'opera di tale mole.

GIUSEPPE VAROLI

ALEXANDRU MYLLER, *Scrieri Matematice*. Bucuresti, Editura Academiei R.P.R. 1958. pp. XII + 596

L'accademico Alessandro Myller, professore onorario dell'Università di Iasi, è uno dei maggiori scienziati Rumeni per aver compiuto profondi studi in varie discipline, è fondatore di una scuola matematica e nello stesso tempo combattente entusiasta per il progresso sociale. La sua attività nel campo scientifico e sociale si è manifestata in diversi lavori, pubblicati nei periodici di matematica e nelle riviste di volgarizzazione.

Il volume di « Scritti Matematici », presentato dalla Casa Editrice dell'Accademia della Repubblica Popolare Rumena contiene i suoi lavori di matematica nell'ordine di pubblicazione cominciando con « Sur la théorie des équations intégrales » pubblicato nel 1905 nel Bulletin de la Société des Sciences de Bucarest. Fra i primi lavori nel campo delle equazioni differenziali e alle derivate parziali si trova anche la sua tesi di laurea, sostenuta a Gottinga « Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung in Beziehung zu den Integralgleichungen » nella quale studia fra l'altro lo sviluppo d'una funzione secondo le autofunzioni di una equazione differenziale di un tipo particolare. I risultati, oggi classici, ma nuovi nel 1906, fanno parte del patrimonio comune della teoria dei problemi ai limiti, così che di solito il loro autore non viene più citato.

La teoria delle equazioni è stata l'obbiettivo dell'Accademico Myller fino al 1912 quando, in seguito alla sua nomina nel 1910, alla cattedra di geometria analitica presso l'Università di Iasi, incominciò ad occuparsi di problemi di geometria algebrica e differenziale. A Iasi, l'Accademico Myller ha creato una scuola di geometria, formando parecchi allievi in tutto il paese.

Gli « Scritti » contengono tutti i lavori di questo campo e danno una viva immagine delle sue ricerche scientifiche. Dai problemi di geometria algebrica ai problemi collegati al parallelismo di Levi-Civita, dalle reti di Cebysev alla geometria centro-affine ed alle corrispondenze per piani tangenti paralleli, si trova un gran numero di problemi pervasi dallo spirito sempre vivo ed acuto dell'Accademico A. Myller, problemi che hanno costituito oggetto di ricerche fatte da Lui e dai suoi allievi.

La collezione degli « Scritti » non è soltanto una « retrospettiva ». I lavori che contiene potrebbero suggerire agli studiosi tanti problemi che aspettano ancora di essere risolti.

Il presente volume contiene, come mostra il suo titolo, soltanto i lavori matematici. Un elenco di lavori su matematici e sulla matematica chiude il volume. I titoli di questi lavori mostrano che l'Accademico A. Myller ha considerato suo obbligo di divulgare la scienza alla quale si è dedicato.

La prefazione è firmata dal Professore M. Haimovici, socio corrispondente dell'Accademia della R. P. Rumena.

ADOLF HAIMOVICI

J.-P. SERRE. *Groupes algébriques et corps de classes*, (Act. scient. et industr. 1264, Hermann, Paris, 1959, pp. 202).

Questa monografia descrive il contenuto di un corso tenuto dall'autore al Collège de France nel 1956-57; una edizione ciclostilata del medesimo corso, un po' più ristretta del presente volume, era stata distribuita negli anni 1957-58. Per ben apprezzare il movente ed il contenuto di questa opera, bisogna rifarsi, oltre che alla Geometria Algebrica astratta, a quella branca della Teoria dei numeri che va sotto il nome di « teoria del corpo di classi »; il problema principale di tale teoria, nella sua formulazione attuale (evolutasi dopo che formulazioni precedenti, più ampie, si sono rivelate troppo difficili per essere attaccate) è il seguente: dato un corpo (commutativo) K, ed un suo prolungamento normale ($=$ di Galois) finito abeliano F (ossia tale che il gruppo di Galois G di F su K sia finito e abeliano), trovare un gruppo C_F di enti legati a K, tale che C_F sia « canonicamente » isomorfo a G; più generalmente, dato K, trovare un gruppo C di enti legati a K, tale che i gruppi di Galois, su K, di qualsiasi F descritto sopra siano canonicamente isomorfi ad immagini omomorfe di C; allora C sarà canonicamente isomorfo al gruppo di Galois (topologizzato) del prolungamento (generalmente infinito) abeliano massimo di K. La legge che dà l'isomorfismo canonico va sotto il nome di « legge di reciprocità »; e poichè per dare un gruppo abeliano finito basta darne i generatori, la legge di reciprocità viene usualmente espressa mediante l'assegnazione di tali generatori, detti « trasformazioni di Frobenius ».

Il problema così posto è ancora lungi dall'essere risolto; fino a pochi anni fa era risolto soltanto nel caso in cui K fosse un corpo di numeri algebrici di grado finito (e in un altro caso di cui parleremo), e dava quindi luogo, come si è detto, ad una branca della Teoria dei Numeri; come punto d'incontro di questa, della teoria delle funzioni di variabile complessa (tramite la funzione ζ di Riemann), e, recentemente, della topologia algebrica (o algebra coomologica), era una teoria vasta ed elevata, e forse l'unica, fra le varie parti della « regina della matematiche », che offrisse dei metodi anzichè dei risultati e problemi isolati. L'altro caso in cui la teoria del corpo di classi era stata sviluppatta (dal 1930 in poi) è quello in cui K è un corpo di funzioni algebriche di una variabile con corpo delle costanti finito (e quindi di caratteristica $p \neq 0$); questo caso, che ha in comune col precedente il fatto di partire da un corpo di « dimensione assoluta » 1, era stato sviluppato in analogia al caso dei numeri algebrici, e lo aveva anzi sorpassato in quanto per esso era stata dimostrata la congettura di Riemann sugli zeri della funzione ζ (Hasse, Deuring, Weil).

Il Cap. VI dell'opera qui recensita (di cui costituisce il punto più avanzato) affronta, e risolve, il problema del corpo di classi per il caso in cui K sia un corpo di funzioni algebriche di un numero finito di variabili, con corpo delle costanti finito; il metodo, ed i risultati, sono generalizzazioni di quelli seguiti da Lang in varie recenti pubblicazioni per casi particolari, e confermano l'importanza dei metodi della geometria algebrica nella teoria del corpo di classi (e viceversa). Anzitutto, se k è il corpo (finito) delle costanti di K, esiste un modello normale (proiettivo) irriducibile V di K su k, ossia esiste una varietà algebrica normale V tale che $K = k(V)$; un primo, e fondamentale, risultato asserisce allora che se k è anche il corpo delle costanti di F, esistono un modello proiettivo V' di F, e delle opportune varietà gruppali commutative (della stessa dimensione) A, A', tali che valga uno schema commutativo del tipo

$$\begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{\varphi'} & A' \\ {\scriptstyle\alpha'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ V & \xrightarrow[\varphi]{} & A, \end{array}$$

ove: α' è l'applicazione razionale di V' su tutta V data dall'immersione di K in F; α è un omomorfismo di A' su tutta A; φ' e φ sono applicazioni razionali, e φ è *massimale*, nel senso che ogniqualvolta φ si fattorizzi in $V \xrightarrow[\psi]{} B \xrightarrow[h]{} A$ (con ψ razionale, B gruppale, ed h isogenia, ossia omomorfismo che conserva la dimensione), h deve essere un isomorfismo; inoltre α' è ottenibile da α mediante *retrazione* (*pull-back* secondo Lang), e cioè: V' è l'insieme pei punti $v \times a'$ di $V \times A'$ tali che $\varphi v = \alpha a'$. Esempi di φ massimali sono dati dall'applicazione di una curva sulla propria jacobiana, o di una varietà sulla propria varietà di Albanese (così si usa ora chiamare una delle due varietà introdotte da Severi sotto il nome di « varietà di Picard »). Veramente, l'enunciato di Serre fa uso degli spazi omogenei principali in luogo della varietà gruppali, ma non è il caso qui di insistere su questa precisazione tecnica.

L'applicazione φ definisce una relazione di equivalenza fra cicli di dimensione zero ($=$ combinazioni lineari formali, a coefficienti interi, di un numero finito di punti), razionali su k, di V: se infatti ad ogni tale ciclo $c = \Sigma_i \; n_i v_i$ ($v_i \in V$) si fa corrispondere il punto $\varphi c = \Sigma_i \; n_i \varphi v_i$ (la Σ ora presa su A) di A (previa una opportuna traslazione su A), lo zero dell'equivalenza è dato dai c per i quali $\varphi c = 0$; sia N_φ questo gruppo di cicli, sia C il gruppo dei cicli razionali di dimensione zero su V, e sia $T_{F|K}$ il sottogruppo di C formato da quei cicli che sono *traccie* su V di cicli di V'; allora la legge di reciprocità asserisce *l'esistenza di un ben determinato isomorfismo di* $C_F = C/N + T_{F|K}$ *su tutto il gruppo di Galois* G *di* F *su* K; se invece il corpo delle costanti di F è più grande di k (ossia se il ricoprimento non è puramente geometrico), G è composto della parte geometrica sopra descritta, e di una parte puramente algebrica di facile descrizione.

Il resto del Cap. VI contiene una discussione della legge di reciprocità, con costruzione esplicita della sostituzione di Frobenius in casi particolari, e delle sue relazioni e analogie con enti già noti (per esempio gli ideli); non include invece una discussione delle conseguenze di tipo trascendente (funzione ζ e serie L).

Essenziali per una piena comprensione del Cap. VI sono i Capp. VII, III, IV, V (in quest'ordine); il Cap. VII contiene un breve riassunto, con concise dimostrazioni, della teoria della struttura delle varieta gruppali (limitatamente al caso commutativo) sviluppata dal recensore, non contiene la dimostrazione dell'assenza di torsione nelle varieta abeliane (che pero necessita in altre parti della monografia), ma contiene la preannunciata dimostrazione dell autore del teorema di struttura delle varieta gruppali periodiche (qui chiamate « unipotenti »), diversa da quella a suo tempo data dal recensore, contiene anche una notevole semplificazione ed estensione basata sulla formula di Kunneth, di un risultato del recensore sulle classi di ripartizioni (p 185)

I Capp III, IV, V sono dedicati ad una descrizione accurata, con apporti personali, della teoria di Severi-Rosenlicht sulle jacobiane generalizzate, ossia sulle jacobiane costruite a partire da una relazione di equivalenza lineare su curve sulle quali sia stato fissato un *modulo* (secondo Serre), o un *gruppo neutro* (secondo Severi) La teoria dei moduli, e dei relativi simboli locali, e un apporto dell'autore, e conduce per esempio (nel Cap VI) alla dimostrazione dell'identita dei significati del termine *conduttore* nel senso geometrico e nel senso della teoria del corpo di classi, nel Cap III si trovera anche una dimostrazione del teorema $f((g)) = g((f))$ di Lang

I cenni riassuntivi precedenti credo bastino a mettere in evidenza il fatto che si tratta di un'opera che centra in pieno uno dei punti piu elevati della Matematica, il numero relativamente esiguo di pagine non deve pero ingannare sulla facilita (per il non specialista) di impadronirsi dell'argomento leggendo questa monografia le dimostrazioni sono estremamente condensate, l'ordine di esposizione non e sempre quello logico e si fa uso abbastanza frequente (sia pure con richiami bibliografici) di risultati assai riposti, la cui dimostrazione e reperibile solo in articoli originali di ricerca, a cio va aggiunto un certo gergo sviluppatosi fra i bourbakisti, ma poco diffuso fra i comuni matematici monocefali, e che puo talvolta generare difficolta semantiche Mi riferisco qui non tanto all'uso corrente di termini asettici come « iniezione », « biezione », « surgettivo », ecc, che ormai sono abbastanza ben noti e comunque facilmente ricostruibili quanto, per esempio, alla noncuranza con cui viene piu volte citato il « teorema 90 » (senza virgolette), che e normalmente privo di nome, in contrasto, l'uso delle virgolette per citare, per esempio, il teorema di Bertini (p 147) genera nel lettore il sospetto che si tratti di qualcosa di diverso dal ben noto teorema omonimo, o che forse Bertini c'entri poco (in tal senso pare infatti che si usino le virgolette per il « teorema di Chevalley » a p 50) A parte queste osservazioni, lo stile dell'opera non e affatto ermetico, e cio forse riconferma che l'ermetismo a tutti i costi e inversamente proporzionale all'altezza del soggetto ed alla statura scientifica dell autore

L'inclusione del Cap II, di natura essenzialmente elementare, risponde probabilmente ad un desiderio dell'autore di rendersi leggibile anche da chi desiderasse scegliere questo tipo di problemi come campo di specializzazione, pur essendone relativamente digiuno, ed e fuor di dubbio che un lettore di tale tipo, che pero consultasse anche gran parte dei lavori citati nella bibliografia, sarebbe ampiamente ripagato dello sforzo (non lieve!) compiuto, e non voglio lasciarmi sfuggire l'occasione di far notare ad un tale lettore che la monografia di Serre rappresenta solo una tappa nell'esplorazione di una zona ove i problemi aperti sono ben piu numerosi dei ricercatori L'opera e invece di utilita pressoche nulla per chi volesse scorrerla per aggiornarsi su un campo lontano dal proprio

Qualunque tipo di lettore, ma soprattutto lo specialista che desideri consultare risultati isolati, sara disturbato da due pecche della presentazione l'una e la incompletezza degli enunciati, che quasi sempre costringe a rileggere buona parte dell'antefatto per snidare le ipotesi e i significati dei simboli, l'altra e la ormai diffusissima, e deprecabile, abitudine di numerare progressivamente, e separatamente, i Teoremi, i Lemmi, i Corollari, le formule numerate, e le Proposizioni (ci sono anche loro), ad esempio, chi cercasse il Teorema 3 del Cap. V lo troverebbe subito dopo il Corollario della Proposizione 9, e subito prima del Lemma 21, e dovrebbe rileggere almeno 5 pagine per scoprire le ipotesi e i significati dei simboli.

Ogni capitolo è corredato da una brevissima nota storico-bibliografica, ed una bibliografia comprendente 104 titoli chiude l'opera; l'esistenza stessa di una nutrita bibliografia è una piacevole innovazione in un libro della scuola bourbakista; e l'inclusione di una ventina di lavori contemporanei decisamente estranei a quella scuola è uno strappo alla regola che mette in risalto, anzichè sminuire, il notevole contribuito dell'autore e dei suoi allievi allo sviluppo delle teorie esposte.

IACOPO BARSOTTI

J. MIKUSINSKI, *Operatorenrechnung*, (Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1957, pag. 360).

È la traduzione in tedesco di opera comparsa nello stesso anno in lingua polacca. Si tratta di un libro interessante soprattutto per l'originale impostazione data al calcolo degli operatori. L'esposizione è mantenuta su un piano elementare e la teoria è illustrata da numerose applicazioni concrete, cosicchè il volume può interessare una vasta cerchia di lettori.

L'opera è divisa in sei parti. La Parte I tratta dell'algebra degli operatori: si considera l'anello delle funzioni $a(t)$ continue per $t \geq 0$ nel quale la somma è quella ordinaria, mentre il prodotto è il *Faltung* definito da $a(t)b(t) = \int_0^t a(\tau)b(t-\tau)d\tau$; si estende tale anello ad un campo e gli elementi di questo sono chiamati *operatori*. Veramente non viene usato questo linguaggio algebrico, ma si presenta la definizione di operatore in modo elemetare paragonando le funzioni ai numeri interi e gli operatori ai numeri razionali. Con pochi semplici sviluppi di quest'idea (e considerando anche funzioni continue a tratti, sommabili in ogni intervallo limitato) si arriva subito ad interessanti applicazioni alle reti di circuiti elettrici e ad alcuni problemi sulle travi.

Nella Parte II si sviluppa la teoria delle successioni e delle serie di operatori con applicazioni varie (per esempio alcuni tipi di equazioni alle differenze).

La Parte III è dedicata al calcolo differenziale degli operatori, con molte applicazioni (corde vibranti, propagazione del calore, equazione dei telegrafisti).

Fino a questo punto le applicazioni alle equazioni differenziali, ordinarie o a derivate parziali, son fatte soltanto su esempi particolari; una trattazione più generale si trova nella Parte IV.

La Parte V è rivolta al calcolo integrale degli operatori: sono mostrate varie applicazioni e, fra l'altro, si fa un confronto dei metodi usati nel libro con quelli usuali fondati sull'uso della trasformazione di Laplace.

Infine la Parte VI è una raccolta di formule e tabelle, destinate soprattutto alle applicazioni elettrotecniche.

Si può dire nel complesso che questo volume differisce dai numerosi trattati sul Calcolo simbolico già esistenti, soltanto nell'impostazione, giacchè la parte formale risulta essere la medesima; comunque essa costituisce un altro (ben riuscito) esempio dei moderni tentativi di algebrizzare ogni teoria. Riteniamo però che il metodo solito della trasformazione di Laplace sia concettualmente più semplice e perspicuo.

ALDO GHIZZETTI

M. Louis de Broglie, *La théorie de la mesure en mecanique ondulatoire*, (Interpretation usuelle et Interpretation causale), Paris, Gauthier-Villars Editeurs - Imprimeur - Libraire, 1959, p. 130.

M. Louis de Broglie, il famoso fisico francese che ha per primo riconosciuto la natura ondulatoria della materia, ha assunto da qualche tempo assieme ad alcuni altri fisici una posizione eterodossa nei confronti dell'interpretazione statistica di uso comune della meccanica ondulatoria. Per L. De Broglie la nozione di complementarietà di Bohr è inaccettabile perchè poco intellegibile non potendo egli ritenere valida una immagine ambigua della materia che a volta è ondulatoria a volta granulare, a seconda del dispositivo sperimentale di cui ci serviamo per indagarne la natura.

In questo volumetto si tenta di negare alla funzione d'onda della meccanica ondulatoria il ruolo di grandezza in grado di fornire una descrizione completa della dinamica microscopica. Secondo l'autore è ammissibile concepire una realtà fisica indipendente dall'osservatore e inventare parametri nascosti che possono servire allo scopo di ristabilire il procedere deterministico dei fenomeni naturali così come si riscontra nella dinamica dei corpi macroscopici.

In metà degli otto capitoli che compongono il libro si presenta in forma abbreviata la teoria della misura di Von Neumann. Nell'altra metà si formula invece il tentativo di una interpretazione causale della misura in meccanica ondulatoria ricorrendo all'immagine d'onde con singolarità locali che percorrono con velocità ben determinata le stesse linee di corrente fornite dalla immagine idrodinamica della propagazione ondosa in meccanica quantica. Le singolarità dovrebbero essere i corpuscoli.

In realtà la proposta di De Broglie, malgrado le numerose ammissioni come ad esempio la non linearità delle eq. del campo in piccoli domini spaziali di estensione finita fino ad ora non suffragate da fatti sperimentali, non serve a darci nessun risultato nuovo, rispetto a quelli già ottenuti con la solita interpretazione probabilistica.

Mario Verde

A. Khintchine - Kettenbrüche - n. 3 della collezione *Mathematisch-Naturwissenschaftliche Bibliothek*, Teubner, Leipzig, (1956), pagg. VI-96. Traduzione effettuata sulla seconda edizione russa (Mosca, 1949) da Viktor Ziegler.

Si tratta di un manuale destinato a fornire notizie di carattere istituzionale sulla teoria delle frazioni continue e sulle principali applicazioni che solitamente ne vengono fatte alla teoria dei numeri.

L'opera, il cui intento è dunque essenzialmente didattico, è tenuta in generale su un tono elementare, che nell'ultima parte si eleva nella trattazione di questioni più specializzate.

Delle tre parti di cui consta il libretto, la prima tratta delle classiche proprietà algoritmiche di carattere elementare delle frazioni continue; un particolare rilievo è dato naturalmente alle frazioni continue cosiddette *regolari*, i cui elementi sono cioè numeri naturali, il primo solamente potendo essere più in generale un numero intero.

La seconda parte tratta della rappresentazione dei numeri reali mediante frazioni continue. Qui particolare attenzione e posta naturalmente a classiche questioni di approssimazione diofantea; vengono illustrati e dimostrati fra altro il teorema di Hurwitz, sulla approssimabilità degli irrazionali mediante razionali, il teorema di Tchebichef, sulla approssimabilità di numeri reali mediante forme lineari (caso unidimensionale del teorema di Kronecker), il teorema di Liouville sulla approssimabilità dei numeri algebrici e il teorema di Lagrange sulla equivalenza tra frazioni continue periodiche e irrazionali quadratici.

La terza parte che, come abbiamo accennato, presenta un interesse più particolare, tratta di alcune questioni metriche nella teoria delle frazioni continue. La proposizione fondamentale che qui viene dimostrata e che risale in sostanze al Borel, è quella del resto abbastanza nota, che può essere così formulata:

se $f(x)$ è una funzione positiva continua per $x > 0$, e tale che $xf(x)$ risulti decrescente (in senso lato), allora la disequazione:

$$|\alpha - p/q| < f(q)/q$$

ammette infinite soluzioni in interi p, q $(q > 0)$ per quasi tutti i numeri reali α, o al contrario solo per un insieme di numeri α di misura nulla, a seconda che l'integrale:

$$\int_0^\infty f(x)dx$$

risulti divergente o convergente.

L'Autore chiude la sua esposizione diffondendosi su una elegante questione metrica sollevata da Gauss e risolta nel 1928 da R. O. Kusmin. Essa è probabilmente la prima questione metrica che si sia presentata storicamente nella teoria dei numeri e fu formulata inizialmente in termini probabilistici. Noi potremo così riassumerla.

Consideriamo l'insieme dei numeri reali $\alpha (0 < \alpha < 1)$ col relativo sviluppo in frazione continua:

$$\alpha = [0, a_1, a_2, ...]$$

e poniamo $z_n(\alpha) = [0, a_{n+1}, a_{n+2}, ...]$. Indichiamo poi con $m_n(x)$ la misura dei numeri α per cui risulta: $z_n(\alpha) < x$.

Gauss aveva formulato in una sua lettera al Laplace la notevole affermazione:

$$\lim_{n \to \infty} m_n(x) = \log(1 + x)/\log 2 \qquad (0 \leq x \leq 1),$$

e posta la questione di stabilire una conveniente limitazione per la differenza

$$m_n(x) - \log(1 + x)/\log 2$$

in funzione di n.

Fu appunto il Kusmin a risolvere la questione dimostrando che:

$$|m_n(x) - \log(1 + x)/\log 2| < A \exp(-\lambda\sqrt{n})$$

con A e λ costanti positive assolute.

L'Autore riporta la dimostrazione del teorema di Kusmin e ne trae lo spunto per alcune interessanti considerazioni sulle medie degli elementi dello sviluppo in frazione continua di un numero reale α. Notevole a questo riguardo è il risultato seguente:

per quasi tutti gli $\alpha (0 < \alpha < 1)$ con $\alpha = [0, a_1, a_2, \ldots]$, si ha:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \prod_{r=1}^{\infty} (1 + 1/(r^2 + 2r)) \log r / \log 2 = 2{,}6 \ldots$$

Il lavoro appare nel complesso ben riuscito rispetto al fine didattico che l'Autore si era proposto. La dosatura opportuna degli argomenti, la cura costante nell'evitare difficoltà non essenziali, poco adatte a un primo studio, la gradualità, con cui il lettore è condotto e quasi allettato a seguire lo sviluppo della teoria dalle prime elementari nozioni fino alla trattazione di questioni già alquanto raffinate, fanno di questo libretto un'ottima guida per chi voglia, partendo con le nozioni del primo biennio, introdursi nella tecnica e nello spirito delle approssimazioni diofantee e delle questioni metriche dell'aritmetica.

MARCO CUGIANI

Seminaire de Théories Physiques dirigé par Mr. Louis de Broglie. Secrétariat mathématique, 11 rue Pierre Curie, Paris 5, Vol. 1° 1955, Vol. 2° 1956, Vol. 3° 1957.

Trattasi di una raccolta litografica di una serie di seminari tenuti alla facoltà di Scienze di Parigi. Gli argomenti, tranne qualche eccezione, sono di teoria dei campi quantizzati.

Vi si nota anche la presenza di un discreto numero di conferenze dedicate ai tentativi nuovi fatti da De Broglie e alcuni suoi collaboratori per una interpretazione causale della meccanica ondulatoria. Buona parte del materiale è comparsa anche sotto forma di pubblicazione in vari giornali di fisica.

Non si può dire che questa raccolta rispecchi nel suo intento e nello svolgimento dei temi, i veri problemi che si agitano attualmente nella teoria dei campi.

MARIO VERDE

L. HOLZER, *Zahlentheorie,* in due volumi, rispettivamente di pag. VI-202 e VIII-127, n. 13 e 14 della Collezione « Mathematisch-Naturwissenschaftliche Bibliothek », Teubner, Leipzig (1958-1959).

Si tratta di un libro dedicato soprattutto alla teoria dei numeri algebrici. L'esposizione, condotta in una forma piuttosto serrata, è generalmente ispirata ai più moderni punti di vista sull'argomento.

Il primo volume è diviso in tre capitoli.

Nel primo sono esposte nozioni propedeutiche generali. Divisibilità, congruenze, funzioni aritmetiche, radici primitive, alcune applicazioni del principio dei cassetti (teorema di Thue e questioni connesse di analisi diofantea di 2° grado) sono gli argomenti principali di questa prima parte e costituiscono il complesso di nozioni elementari di fondo di tutta l'opera.

Nel secondo capitolo è trattato il teorema di reciprocità dei residui quadratici. Dopo un breve sguardo sulla teoria dei campi di Galois l'Autore giunge ad una elegante dimostrazione del teorema, fondata sulla considerazione di somme di Gauss nei campi di Galois. Viene poi esposta ed illustrata la classica generalizzazione del teorema di reciprocità relativa al simbolo di Jacobi e viene introdotto ed ampiamente illustrato l'uso e le proprietà principali del simbolo di Kronecker. Altre questioni più o meno direttamente connesse sono trattate in questa seconda parte in cui figura fra l'altro la dimostrazione del teorema di Bachet sulla decomponibilità di un intero in somma di quattro quadrati e la dimostrazione del teorema di Skolem sulla risoluzione delle congruenze cubiche.

La terza parte contiene gli elementi della teoria dei corpi algebrici. La trattazione è fatta in una forma piuttosto compatta e porta a formare un quadro completo degli aspetti fondamentali dell'argomento. In particolare un certo posto è fatto ai concetti di geometria dei numeri che conducono fino alla dimostrazione del celebre teorema di Minkowski secondo cui il discriminante di un corpo algebrico (diverso dal campo razionale) è sempre > 1 in valore assoluto. La notorietà di questo teorema è legata anche al fatto che la dimostrazione, tentata inutilmente da altri autori prima che dal Minkowski, discende invece piuttosto facilmente dall'ordine d'idee introdotto appunto dalla geometria dei numeri, il che ha costituito uno dei più vistosi successi di tale teoria.

Il problema delle unità è trattato in questo capitolo solo per i campi quadratici. Il volume si chiude con alcune notizie preliminari sui corpi ciclici e con le prime informazioni sul numero delle classi di ideali di cui qui si dimostra che è finito per ogni corpo algebrico.

Il secondo volume è diviso in due capitoli, nei quali vengono approfondite le nozioni sui corpi algebrici. Nel primo viene dimostrato il teorema di Dirichlet sulle unità di un corpo algebrico (seguendo un metodo dimostrativo che si scosta in parte da quello classico) e vengono introdotti alcuni notevoli concetti: di differente, di anello, di conduttore di un anello. Particolare sviluppo viene dato poi allo studio dei sovracorpi e alla teoria di Hilbert dei corpi K di Galois sopra un corpo k, la quale riguarda sostanzialmente le leggi di decomposizione in K di un ideale primo in k, e qui vengono introdotti i concetti di gruppo di decomposizione, gruppo di inerzia, gruppo di diramazione, divenuti classici nella moderna teoria dei corpi algebrici. Il primo capitolo si chiude con uno studio più approfondito sulla decomposizione degli ideali primi di un corpo k in un corpo K ciclico di grado primo sopra k.

L'ultimo capitolo fornisce altri concetti essenziali per la teoria dei corpi algebrici e per la teoria dei corpi di classi. Si apre colla determinazione del numero delle classi, e si sviluppa nello studio dei corpi ciclici sopra un assegnato corpo k. Illustra poi altri concetti (ricordiamo ad es. quello di segnatura di un numero algebrico), per concentrarsi in seguito nello studio degli ideali ambigui e del numero delle classi ambigue. Giunge così a dimostrare il noto teorema di Moriya sul numero delle classi ambigue nei corpi ciclici e quello classico di Weber secondo cui è dispari il numero delle classi nel corpo delle radici 2^n-esime dell'unità.

Viene migliorata infine la classica limitazione relativa al minimo della norma degli ideali appartenenti ad una classe di un corpo quadratico reale, sfruttando un noto teorema di Fujiwara, che perfeziona il celebre teorema di Hurwitz sulla approssimabilità degli irrazionali mediante razionali, precisando che ogni irrazionale ξ, eccezion fatta per gli elementi del campo quadratico $K(\sqrt{5})$, ammette una approssimazione del tipo: $|p/q - \xi| < q^{-2}/\sqrt{8}$ per infiniti interi p, q.

In complesso si tratta di un'opera che tende soprattutto a introdurre il lettore nella parte più elevata della teoria dei numeri algebrici. In essa è fatto un moderato uso di metodi e concetti abituali nell'algebra moderna.

La lettura può esserne consigliata a coloro che intendano, forniti già di qualche nozione di algebra, mettersi nelle condizioni di poter seguire la teoria dei corpi algebrici e la teoria dei corpi di classi nei loro aspetti classici e in quelli più recenti.

MARCO CUGIANI

W. HEISENBERG, E. SCHRÖDINGER, M. BORN, P. AUGER. *Discussione sulla Fisica Moderna*, Edizioni Scientifiche Einaudi, Torino 1959, p. 131, prezzo L. 1200.

In questo volumetto, il cinquantanovesimo della collana di biblioteca di cultura scientifica di Einaudi, sono raccolte quattro conferenze organizzate dalla Rencontres Internationales de Genève. Malgrado il titolo faccia pensare ad una presentazione discorsiva sui problemi che attualmente occupano i fisici moderni, gli argomenti trattati da quattro eminenti professori di fisica riflettono in parte questioni di interpretazione filosofica di risultati che i fisici hanno da tempo già acquisiti (W. Heisenberg, E. Schrodinger), in parte riguardano le conseguenze che il progresso raggiunto di recente nello sfruttamento di fonti di energia nucleare avranno per la comunità umana (M. Born), ed infine un esame dello sviluppo della conoscenza propriamente scientifica e dei suoi rapporti con il resto dello scibile umano (P. Auger).

Nella conferenza di Heisenberg dedicata a problemi filosofici della fisica atomica, troviamo una breve ed interessante discussione del problema della materia. Per Heisenberg gli schemi ancora incompleti che la fisica teorica ha elaborato per cogliere una prima visione unitaria dei fenomeni, del resto ancora scarsamente sconosciuti, riguardanti i frammenti più minuti della materia, indicherebbero un ritorno spirituale ad una visione platonica del mondo. Per la fisica moderna, secondo Heisenberg, all'origine non c'è più un oggetto materiale come l'atomo di Democrito, ma una forma, una simmetria matematica, una idea di Platone.

E. Schrödinger svolge brillantemente il suo difficile tema sull'immagine attuale della materia. Egli tuttavia ne discute solo l'aspetto filosofico per avere modo di manifestare il suo ben noto malcontento per il linguaggio a base di immagini intuitive quali « singolo corpuscolo » o « salto quantico » adoperato dalla maggioranza dei fisici. Per Schrödinger è solo la nozione di propagazione ondosa ad avere valore. Per altri fisici vale esattamente l'opposto. Ciò pone in evidenza la crisi che si può provocare quando si rigetta la nozione di complementarietà di Bohr. Il Prof. M. Born nella sua bella conferenza vuole richiamare, spesso in tono drammatico, l'attenzione degli uomini sui problemi di natura morale e delle complicazioni di natura sociale che l'accrescimento della potenza umana comporterà nel futuro. La storia dell'uomo secondo M. Born si suddivide in due grandi periodi, quello trascorso fino ai giorni nostri caratterizzato dalla utilizzazione da parte dell'uomo del fuoco chimico ed un altro che si affaccia davanti a noi difficile e imprevedibile, già iniziatosi con le prime utilizzazioni del « fuoco nucleare ». In conclusione è opera meritoria dell'editore di avere voluto presentare in buona traduzione al pubblico italiano quattro conferenze che si leggono con piacere ed interesse.

MARIO VERDE