
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

DELFINA ROUX

Una dimostrazione del Teorema fondamentale dell'Algebra.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 14
(1959), n.4, p. 563–567.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_4_563_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Una dimostrazione del Teorema fondamentale dell'Algebra

Nota di DELFINA ROUX (a Milano)

Sunto: - Si espone una nuova dimostrazione del Teorema fondamentale dell'Algebra: essa è basata sull'esame della successione dei coefficienti dello sviluppo in serie di potenze dell'inverso di un polinomio che non si annulli nell'origine.

Summary. - We give a new proof of the fundamental Theorem of Algebra. Let $P(z)$ be a polynomial, $P(0) \neq 0$. Considering the expansion of $1/P(z)$ in a power series of z , the proof follows from the behaviour of the sequence of the coefficients of this series.

Riteniamo che alle dimostrazioni note del Teorema fondamentale dell'Algebra, che sono veramente numerose ⁽¹⁾, si possa aggiungere anche la seguente, che non ci risulta essere fra quelle conosciute e che si svolge nell'ordine di idee di K. WEIERSTRASS e A. PRINGSHEIM.

(¹) Informazioni storiche e prospettive sui diversi tipi di dimostrazione si possono vedere per esempio nei seguenti articoli.

G. LORIA, *Il Teorema fondamentale della teoria delle Equazioni algebriche*, «Rivista di Matematica», (1891), pp. 185-284;

A. AGOSTINI, *Il Teorema fondamentale dell'Algebra*, «Periodico di Matematiche» (4), 4, (1924), pp. 307-327;

GIUSEPPE MIGNOSI, *Sul Teorema fondamentale dell'Algebra nell'Algebra classica e nell'Algebra moderna*, Esercitazioni matematiche-Pubblicazioni del Circolo Matematico di Catania, (2), 13, (1941), pp. 28-47;

U. GASAPINA, *Il Teorema fondamentale dell'Algebra*, «Periodico di Matematiche», (4), 23, (1957), pp. 149-163.

Dimostrazioni di questo teorema si trovano nei vari trattati destinati alla teoria delle funzioni analitiche; per esempio:

L. BIANCHI, *Teoria delle funzioni di variabile complessa*, Pisa 1916, pag. 177;

S. PINCHERLE, *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche*, Bologna 1922, pag. 126;

G. BAGNERA, (litografia), *Lezioni sopra la Teoria delle Funzioni Analitiche*, Roma 1926-27, pag. 147;

In tale indirizzo la teoria delle funzioni analitiche è costruita dando rilievo preponderante agli sviluppi in serie di potenze e si può ritenere di restare in tale indirizzo quando si dimostri che risulta necessariamente finito il raggio di convergenza della serie di potenze che rappresenta il reciproco di un polinomio non annullantesi nell'origine. Seguiremo appunto questa via.

È evidente che possiamo limitarci a considerare il polinomio

$$f(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n, \quad a_n \neq 0$$

e a dimostrare che la funzione

$$\varphi(z) = 1/f(z)$$

non è olomorfa in tutto il piano.

Procediamo per assurdo. Se $f(z)$ non ammette alcuna radice z_0 , la funzione $\varphi(z)$ risulta olomorfa in tutto il piano e quindi lo sviluppo

$$(1) \quad \varphi(z) = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_k z^k + \dots$$

converge assolutamente in tutto il piano. Fissato $c > 0$ arbitrario, dovrà allora essere $b_k c^k \rightarrow 0$, cioè $|b_k| c^k < \varepsilon$ ($\varepsilon < 1$) per $k \geq k_0(\varepsilon)$, cioè $|b_k|^{1/k} < \varepsilon^{1/k} / c < 1/c$ e pertanto $|b_k|^{1/k} \rightarrow 0$.

Questo è assurdo. Infatti, lo sviluppo di $\varphi(z)$ si costruisce tenendo

G. SANSONE, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa*, vol. I°, Padova 1950, pag. 135;

A. PRINGSHEIM, *Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre*, vol. II°₁, Leipzig 1925, pp. 188, 437;

L. BIEBERBACH, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, vol. I°, New York 1945, pp. 153, 182, 186;

E. C. TITCHMARSH, *Theory of functions*, London 1952, pag. 118.

Da un punto di vista algebrico più generale si veda anche la dimostrazione che si trova in:

O. PERRON, *Algebra* vol. I°, Berlin 1932, pag. 242.

Aggiungiamo all'elenco la monografia:

F. HEIGL, *Über die Abschätzung der Wurzeln algebraischer Gleichungen*, « Monatshefte für Mathematik » vol. 62, (1958), pp. 16-55, pubblicata recentemente e rivolta ad argomento connesso con questo, nella quale è riportata una ampia bibliografia.

conto che risulta identicamente

$$f(z) \cdot \varphi(z) \equiv 1$$

e quindi

$$b_0 = 1, \quad b_1 = -a_1, \quad b_2 = -(a_1 b_1 + a_2), \dots,$$

$$b_n = -(a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n), \dots$$

$$(2) \quad b_{n+N} = -(a_1 b_{n+N-1} + a_2 b_{n+N-2} + \dots + a_n b_N).$$

Poniamo

$$\beta_k = \max(|b_k|^{1/k}, |b_{k+1}|^{1/(k+1)}, \dots).$$

Risulta $\dots \geq \beta_k \geq \beta_{k+1} \geq \dots$; $\beta_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$; $|b_k|^{1/k} \leq \beta_k$ e, per infiniti valori N di k

$$(3) \quad |b_N|^{1/N} = \beta_N, \quad |b_N| = \beta_N^N.$$

Inoltre

$$(4) \quad |b_{N+s}| \leq \beta_{N+s}^{N+s} \leq \beta_N^{N+s}, \quad s = 1, 2, \dots$$

Si scelga N abbastanza grande in modo che β_N sia abbastanza piccolo da verificare le due condizioni

$$(5) \quad \beta_N^n < \frac{1}{2} |a_n|$$

$$(6) \quad |a_1| \beta_N^{n-1} + |a_2| \beta_N^{n-2} + \dots + |a_{n-1}| \beta_N < \frac{1}{2} |a_n|$$

(il che è sempre possibile perchè $\beta_k \rightarrow 0$ e $|a_n| \neq 0$); allora dalla (2) otteniamo

$$\begin{aligned} |b_{n+N}| &= |a_1 b_{n+N-1} + a_2 b_{n+N-2} + \dots + a_n b_N| \geq \\ &\geq |a_n b_N| - (|a_1| |b_{n+N-1}| + |a_2| |b_{n+N-2}| + \dots + |a_{n-1}| |b_{N+1}|) \end{aligned}$$

e, per le (3) e (4):

$$\begin{aligned} |b_{n+N}| &\geq |a_n| \beta_N^N - (|a_1| \beta_N^{n+N-1} + |a_2| \beta_N^{n+N-2} + \dots + |a_{n-1}| \beta_N^{N+1}) = \\ &= \beta_N^N (|a_n| - (|a_1| \beta_N^{n-1} + |a_2| \beta_N^{n-2} + \dots + |a_{n-1}| \beta_N)) \end{aligned}$$

e, per la (6)

$$|b_{n+N}| > \beta_N^N (|a_n| - \frac{1}{2}|a_n|) = \frac{1}{2}|a_n| \beta_N^N.$$

Questa disuguaglianza unita alle (4) e (5) conduce alla catena seguente

$$\frac{1}{2}|a_n| \beta_N^N < |b_{n+N}| \leq \beta_N^{n+N} = \beta_N^n \cdot \beta_N^N < \frac{1}{2}|a_n| \beta_N^N$$

e si perviene all'assurdo.

Pertanto si conclude che lo sviluppo in serie di potenze assegnato in (1) per la funzione $\varphi(z) = 1/f(z)$ non è valido in tutto il piano e quindi esiste un punto z_0 singolare per $\varphi(z)$: questo si può presentare se e soltanto se $f(z_0) = 0$.

OSSERVAZIONE. - La sviluppabilità in serie di potenze di z di una funzione $f(z)$ nel massimo cerchio $|z| < R$ in cui essa è ologomorfa, si può dimostrare, seguendo l'ordine di idee di K. WEIERSTRASS-A. PRINGSHEIM, al modo seguente (*).

a) Definizione di $Mf(er)$

Sia $f(z)$ definita per $|z| = r$ e ivi limitata, e un numero complesso di modulo 1. Per ogni n , poniamo $N = 2^n$ e $c_n = e^{2\pi i/N}$. Introduciamo la seguente notazione

$$M_n f(er) = \frac{1}{2^n} \sum_{v=0}^{2^n-1} f(c_n^v r).$$

Se $f(z)$ è continua su $|z| = r$, la successione $\{M_n f(er)\}$ per $n \rightarrow +\infty$ tende a un valore limite finito $Mf(er)$ che vien detto « valor medio di $f(z)$ su $|z| = r$ ».

(*) Vedi A. PRINGSHEIM, loc. cit. in (4), pp. 269-274, 382-390.

b) Il valor medio $Mf(er)$ gode le seguenti proprietà:

$$1) M(er)^0 = 1; M(er)^{\pm v} = 0, v = 1, 2, \dots$$

$$2) \text{ Da } |f(z)| < G \text{ per } |z| = r, \text{ segue } Mf(er) < G.$$

$$3) Mkf(er) = k \cdot Mf(er), k \text{ costante.}$$

$$4) M \sum_{v=0}^{v=m} f_v(er) = \sum_{v=0}^{v=m} Mf_v(er).$$

$$5) \text{ Se la serie } \sum_{v=0}^{\infty} f_v(z) \text{ converge uniformemente su } |z| = r,$$

allora

$$M \sum_{v=0}^{\infty} f_v(er) = \sum_{v=0}^{\infty} Mf_v(er).$$

6) Se $f(z)$ è definita per $0 \leq |z| \leq R$ ed è ivi uniformemente differenziabile ⁽³⁾, allora risulta

$$Mf(er) = Mf(er) = f(0) \quad \text{per ogni } r \leq R.$$

c) Si dimostra poi facilmente il teorema:

Se $f(z)$ è definita per $0 \leq |z| < R$ e uniformemente differenziabile in ogni cerchio $0 \leq |z| \leq r$, $r < R$, allora $f(z)$ è sviluppabile in serie di potenze positive di z

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$$

dove

$$a_v = M(er)^{-v} f(er)$$

(essendo r un valore arbitrario dell'intervallo $0 < r < R$) e tale serie converge assolutamente per ogni $|z| < R$.

Ne segue l'esistenza di un punto singolare sulla circonferenza di convergenza di tale sviluppo.

⁽³⁾ Una funzione $f(z)$ si dice uniformemente differenziabile in una regione R quando, prefissato $\varepsilon > 0$, è possibile determinare δ tale che per qualsiasi $z \in R$, risulti

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) \right| < \varepsilon$$

se $|h| < \delta$.