BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ANTONIO SALMERI

Studio di un'equazione diofantea fratta nel sistema di numerazione B -esimale.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 14
(1959), n.4, p. 554–562.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_4_554_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

Studio di un'equazione diofantea fratta nel sistema di numerazione B -esimale.

Nota di ANTONIO SALMERI (a Bari)

Sunto. - Si prende in esame una speciale equazione di cui si cercano le eventuali soluzioni costituite da numeri $\bar{x}_i$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$) interi positivi, minori di un assegnato intero B . Il problema assume un aspetto particolare se si riguardano i numeri $\bar{x}_i$ per $i=1, 2, \dots, n$ come cifre di un intero, scritto in base B . Tra l'altro si può così agevolmente stabilire per quali valori di n esistono soluzioni e quante esse siano.

Summary. - A special equation is under examination, for the purpose of finding eventual solutions constituted by positive entire numbers $\bar{x}_i$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$), inferior than an assigned number B . The problem acquires a peculiar aspect when the numbers $\bar{x}_i$ by $i=1, 2, \dots, n$ are considered as digits of an entire number, written to the base B . It is thus easy to establish when, against what values of n , there are solutions and how many of them exist.

1. In questa nota ci proponiamo di studiare l'equazione

$$(1) \quad \frac{B^{n-1}x_n + B^{n-2}x_{n-1} + \dots + Bx_2 + x_1}{B^{n-1}x_{n-1} + B^{n-2}x_{n-2} + \dots + Bx_1 + x_n} = x_0$$

in $n+1$ incognite e di cercarne le eventuali soluzioni che soddisfano alle condizioni $x_k < B$ ($k=0, 1, \dots, n$). È subito visto che essa è soddisfatta per $x_0=1$ e $x_k=h$ ($k=1, 2, \dots, n$); vogliamo vedere se esistono altri numeri, oltre ai precedenti che non considereremo, che soddisfano l'equazione data.

Con la limitazione posta, sia il numeratore che il denominatore della frazione a primo membro possono essere interpretati come due numeri B -esimali rispettivamente di cifre

$$x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1 \quad \text{e} \quad x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_n$$

per i quali non si deve però escludere, proprio per la natura del

problema, che la prima cifra possa essere nulla. Intanto, trovati $n + 1$ numeri $\bar{x}_k$ ($k = n, \dots, 1, 0$), i primi n non tutti uguali, chiameremo soluzione dell'equazione il numero B -esimale di cifre $\bar{x}_k$ ($k = n, \dots, 2, 1$) che indicheremo col simbolo

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n \bar{x}_k B^{k-1} = \bar{x}_n \bar{x}_{n-1} \dots \bar{x}_2 \bar{x}_1;$$

inversamente, noto il numero (2), è possibile determinare tutti gli $\bar{x}_k$ ($k = n, \dots, 1, 0$), dato che i primi n sono ordinatamente dati dalle cifre del numero (2), e $\bar{x}_0$ è dato evidentemente dal quoto

$$\bar{x}_n \bar{x}_{n-1} \dots \bar{x}_2 \bar{x}_1 : \bar{x}_{n-1} \bar{x}_{n-2} \dots \bar{x}_1 \bar{x}_n.$$

Il numero (2) si può ottenere nel modo seguente. Fissato un $\bar{x}_0 \neq 1$ e un $\bar{x}_n$, entrambi non nulli, eseguiamo il prodotto $\bar{x}_0 \cdot \bar{x}_n$ che possiamo mettere sotto la forma $\alpha_1 B + \bar{x}_1$, dove i numeri α_1 e $\bar{x}_1$ sono univocamente determinati:

$$(3_1) \quad \bar{x}_0 \bar{x}_n = \alpha_1 B + \bar{x}_1,$$

è possibile quindi calcolare l'espressione $\bar{x}_0 \bar{x}_1 + \alpha_1$, che si può mettere sotto la forma:

$$(3_2) \quad \bar{x}_0 \bar{x}_1 + \alpha_1 = \alpha_2 B + \bar{x}_2,$$

analogamente si ottengono le relazioni:

$$(3_3) \quad \bar{x}_0 \bar{x}_2 + \alpha_2 = \alpha_3 B + \bar{x}_3,$$

$$(3_4) \quad \bar{x}_0 \bar{x}_3 + \alpha_3 = \alpha_4 B + \bar{x}_4, \dots$$

supponiamo che così procedendo si pervenga alla relazione

$$(3_m) \quad \bar{x}_0 \bar{x}_{m-1} + \alpha_{m-1} = \alpha_m B + \bar{x}_m,$$

nella quale $\alpha_m = 0$ e $\bar{x}_m = \bar{x}_n$, pertanto la (3_m) diventa:

$$(3_n) \quad \bar{x}_0 \bar{x}_{n-1} + \alpha_{n-1} = \bar{x}_n.$$

Se moltiplichiamo le relazioni (3_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) per B^{i-1} e indi le sommiamo membro a membro, otteniamo:

$$\begin{aligned} & \bar{x}_0 (B^{n-1} \bar{x}_{n-1} + B^{n-2} \bar{x}_{n-2} + \dots + B \bar{x}_1 + \bar{x}_n) = \\ & = B^{n-1} \bar{x}_n + B^{n-2} \bar{x}_{n-1} + \dots + B \bar{x}_2 + \bar{x}_1, \end{aligned}$$

ovvero

$$\frac{B^{n-1} \bar{x}_n + B^{n-2} \bar{x}_{n-1} + \dots + B \bar{x}_2 + \bar{x}_1}{B^{n-1} \bar{x}_{n-1} + B^{n-2} \bar{x}_{n-2} + \dots + B \bar{x}_1 + \bar{x}_n} = \bar{x}_0.$$

Si possono trovare in tal modo $n + 1$ numeri che soddisfano la (1). Questo metodo, però, ci indica il modo di pervenire al numero (2), ma a priori nulla ci dice circa la sua esistenza o meno,

restando ciò subordinato al verificarsi o meno di relazioni del tipo (3_n)

A questo punto consideriamo il seguente teorema:

I. - Se $N \equiv \bar{x}_n \bar{x}_{n-1} \dots \bar{x}_2 \bar{x}_1$ è soluzione della (1), anche il numero $N \cdot \sum_{k=0}^r B^{kn}$ è soluzione della (1).

Dim.: Il procedimento che ci ha portati alla costruzione del numero (2) e che abbiamo interrotto appena giunti alla relazione (3_n), si poteva ancora seguire e ci avrebbe portati alla relazione

$$(3_{n+1}) \quad \bar{x}_0 \bar{x}_n = \alpha_1 B + \bar{x}_1.$$

Così procedendo, si sarebbero ottenute le relazioni:

$$(3_{n+2}) \quad \bar{x}_0 \bar{x}_1 + \alpha_1 = \alpha_2 B + \bar{x}_2,$$

$$(3_{n+3}) \quad \bar{x}_0 \bar{x}_2 + \alpha_2 = \alpha_3 B + \bar{x}_3,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$(3_{2n}) \quad \bar{x}_0 \bar{x}_{n-1} + \alpha_{n-1} = \bar{x}_n.$$

Le (3_i) ($i = 1, 2, \dots, 2n$) ci assicurano che anche il numero $NN \equiv \bar{x}_n \bar{x}_{n-1} \dots \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_n \bar{x}_{n-1} \dots \bar{x}_2 \bar{x}_1$ è soluzione della (1); analogamente si dimostra che in generale il numero $N \cdot \sum_{k=0}^r B^{kn}$ è soluzione della (1), c. v. d.

In corrispondenza di ogni terna di numeri x_0, x_n, B , si hanno pertanto infinite soluzioni della (1): $N, NN, \dots, N \cdot \sum_{k=0}^r B^{kn}, \dots$. Poniamo quindi la seguente

DEFINIZIONE. - Una soluzione della (1) è semplice quando non è possibile suddividere il numero che esprime tale soluzione in gruppi uguali fra loro per numero di cifre e per cifre; è composta di ordine k quando, potendo suddividere il numero che esprime la soluzione in un certo numero di tali gruppi, k è il più grande fra questi numeri.

Se in corrispondenza di ogni x_0 ($2 \leq x_0 < B$) facciamo assumere a x_n ($1 \leq x_n < B$) tutti i possibili valori, si possono ottenere non più di $(B-1)(B-2)$ soluzioni semplici.

Indicato con S il numero delle soluzioni semplici della (1), si ha pertanto la relazione:

$$(4) \quad S \leq (B-1)(B-2).$$

Passiamo a considerare il seguente teorema:

II. - Sia $1a_{n-1}a_{n-2} \dots a_2a_1$ un numero B -esimale, si consideri in corrispondenza il numero $a_{n-1}a_{n-2} \dots a_2a_11$, e sia

$$(5) \quad \frac{1a_{n-1}a_{n-2} \dots a_2a_1}{a_{n-1}a_{n-2} \dots a_2a_11} = A,$$

dove $A > 1$ è un intero minore di B ; la frazione che si ottiene moltiplicando numeratore e denominatore della (5) per un numero $H < B$ intero positivo, è ancora tale che il denominatore si può ottenere operando sulle cifre del numeratore una sostituzione ciclica.

Dim.: Se $A > 1$ è un intero, deve essere necessariamente $a_{n-1} = 0$ e la (5) diventa

$$\frac{10a_{n-2} \dots a_2a_1}{0a_{n-2} \dots a_2a_11} = A,$$

moltiplicando numeratore e denominatore per un intero $H < B$, posto $0a_{n-2} \dots a_2a_1 \cdot H = b_{n-1}b_{n-2} \dots b_2b_1$, si ha, c. v. d.:

$$\begin{aligned} \frac{10a_{n-2} \dots a_2a_1 \cdot H}{0a_{n-2} \dots a_2a_11 \cdot H} &= \frac{(B^{n-1} + 0a_{n-2} \dots a_2a_1) \cdot H}{(0a_{n-2} \dots a_2a_1 \cdot B + 1) \cdot H} = \\ &= \frac{HB^{n-1} + b_{n-1}b_{n-2} \dots b_2b_1}{b_{n-1}b_{n-2} \dots b_2b_1 \cdot B + H} = \frac{Hb_{n-1}b_{n-2} \dots b_2b_1}{b_{n-1}b_{n-2} \dots b_2b_1H} = A. \end{aligned}$$

Questo teorema ci mostra che:

a) Se esiste una soluzione della (1) relativa a $x_n = 1$, questa è della forma $10a_{n-2} \dots a_2a_1$.

b) Se $N_1 \equiv 10a_{n-2} \dots a_2a_1$ è soluzione della (1) anche $H \cdot N_1$ ($1 \leq H < B$) è soluzione della (1) ed è relativa a $x_n = H$.

c) Il numero $H \cdot N_1$ ha lo stesso numero di cifre del numero N_1 .

d) Se in corrispondenza di un x_0 esiste la soluzione relativa a $x_n = 1$, esistono anche le soluzioni relative ad ogni $x_n < B$.

Non è in generale vero che se N_1 è una soluzione semplice, lo è anche $H \cdot N_1$ (1). Ritourneremo sulla questione col teorema VII.

(1) Vedansi, per esempio, le soluzioni relative a $B = 10$ e $x_0 = 5$, dove, essendo N_1 la soluzione semplice relativa a $x_n = 1$, la soluzione $7N_1$ è una soluzione composta di ordine 7. Per $B = 10$ la (1) è stata risolta nella nota: ANTONIO SALMERI, *Risoluzione in numeri interi di una particolare equazione fratta con un numero indeterminato di variabili*, Periodico di Matematiche, Serie IV, vol. XXXIV (1956), pagg. 234-239.

Ad ogni modo data per un certo A la soluzione semplice relativa a $x_n = 1$ possiamo ottenere le altre soluzioni moltiplicando per ogni intero $H < B$ (cor. b, teor. II) ed estrarre le semplici dalle eventuali soluzioni composte.

2. Siamo ora in grado di dare una notevole interpretazione delle soluzioni della (1), che ci permetterà con l'ausilio dei risultati già ottenuti, di studiare l'equazione nel modo più esauriente.

Infatti si ha il seguente teorema:

III. - *Il periodo del numero B-esimale generato dalla frazione $\frac{AH}{AB-1}$ è soluzione della (1) per ogni valore di H e di A tali che $1 \leq H < B$ e $2 \leq A < B$.*

Dim.: Abbiamo evidentemente $(AB-1, B) = 1$ e supponiamo sia $gss(AB-1, B) = n$.

Posto $\frac{A}{M} = \frac{1}{B} + \frac{1}{B} \cdot \frac{1}{M}$, dalla quale segue $M = AB - 1$. e $\frac{1}{M} = \frac{1}{AB-1} = 0, 0a_{n-2} \dots a_1 a_0 \dots$, (essendo $B < M < B^2$), si ha: $\frac{A}{M} = \frac{A}{AB-1} = 0, 1 + 0, 00a_{n-2} \dots a_1 a_0 \dots = 0, 10a_{n-2} \dots a_1 a_0 \dots$, quest'ultimo numero è periodico semplice ed essendo $(AB-1, A) = 1$ avrà un periodo di n cifre onde avremo $a_0 = 1$.

Per cui in definitiva

$$\frac{A}{AB-1} = 0, (10a_{n-2} \dots a_1) = \frac{10a_{n-2} \dots a_1}{B^n - 1},$$

$$\frac{1}{AB-1} = 0, (0a_{n-2} \dots a_1 1) = \frac{0a_{n-2} \dots a_1 1}{B^n - 1},$$

e facendo il rapporto membro a membro, si ottiene

$$\frac{10a_{n-2} \dots a_1}{0a_{n-2} \dots a_1 1} = A.$$

Ciò prova che il numero $10a_{n-2} \dots a_1$, periodo del numero generato dalla frazione $\frac{A}{AB-1}$, è soluzione della (1) relativa a $x_n = 1$, per ogni possibile valore di A . Quindi la frazione $\frac{A}{AB-1}$ permette di calcolare soluzioni corrispondenti a $x_n = 1$, $x_0 = A$, relative al particolare sistema B-esimale.

Può accadere che $(AB-1, H) > 1$ e che in tal caso risulti il periodo minimo della frazione $\frac{HA}{AB-1}$ non più uguale a H .

$\cdot 10a_{n-2} \dots a_1$. In questo caso basta avvertire che la soluzione $H \cdot 10a_{n-2} \dots a_1$ non è semplice e che da essa se ne può estrarre sempre una semplice (vedasi nota (1), teor. VII e la fine del § 1).

Possiamo quindi concludere che in corrispondenza di ogni possibile valore di A e H , i periodi dei numeri B -esimali generati dalla $\frac{HA}{AB-1}$ ci forniscono soluzioni semplici della (1), c. v. d.

Siamo ora in grado di stabilire il teorema:

IV. - *L'equazione (1) è risolubile per ogni $B \geq 3$ e convenienti valori di n ; per un fissato B essa ammette $(B-1)(B-2)$ soluzioni semplici corrispondenti eventualmente a diversi valori di n .*

Dim.: Poichè $AB-1$ è evidentemente primo con la base $\bar{B}$, la $\frac{HA}{AB-1}$, per qualsivoglia $B \geq 3$, è generatrice di numeri periodici semplici, i cui periodi, in numero di $(B-1)(B-2)$, sono tutti soluzioni semplici della (1) (teor. III). Indicato ancora con S il numero delle soluzioni semplici, si ha:

$$S \geq (B-1)(B-2).$$

Il confronto di questa relazione con la (4), ci dà, c. v. d.:

$$S = (B-1)(B-2).$$

Questo teorema ci permette di enunciare il teorema III nella forma seguente:

III'. - *Tutte e sole le soluzioni semplici della (1) sono date dai periodi dei numeri generati dalla $\frac{AH}{AB-1}$ per ogni possibile valore di A e H .*

3. Come si può rilevare dall'esame delle soluzioni, la (1) non ammette soluzioni per qualsivoglia valore di n ; per esempio, nel sistema decimale essa è risolubile per n uguale a $6k$, $13k$, $22k$, $28k$ e $58k$ ($k=1, 2, 3, \dots$) (2). Si hanno in proposito i seguenti teoremi.

(2) ANTONIO SALMERI, l.c. (4), pag. 239.

V. - Se la frazione $\frac{HA}{AB-1}$ è irriducibile per ogni $H < B$, la (1) è risolvibile solo per quei valori di n per i quali si ha:

$$(6) \quad n = k \cdot gss(AB - 1, B),$$

dove $n + 1$ è il numero delle incognite della (1) e k un intero positivo.

Dim.: Basta ricordare (teor. III') che tutte le soluzioni semplici della (1) sono espresse dai periodi dei numeri generati dalla frazione $\frac{HA}{AB-1}$, supposta irriducibile, e che, per una ben nota proprietà, il numero delle cifre di tali periodi è dato dal $gss(AB - 1, B)$. Prendendo in considerazione, infine, anche le soluzioni composte, si ha (teor. I) la (6).

VI - La frazione $\frac{HA}{AB-1}$ è irriducibile per ogni $H < B$, solo se $AB - 1$ è un numero primo.

Dim.: La condizione è sufficiente, facciamo vedere che è anche necessaria.

Intanto, se $AB - 1$ non è primo, non può ammettere fra i suoi fattori, almeno due, soltanto numeri maggiori di B . Siano essi $B + E$ e $B + F$, con E e F interi positivi, il loro prodotto $(B + E)(B + F) = B^2 + (BE + BF + EF)$ è infatti maggiore del massimo valore di $AB - 1$ che è $(B - 1)B - 1 = B^2 - (B + 1)$. Se $AB - 1$ non è primo deve quindi ammettere fra i suoi fattori almeno un numero $K < B$, e pertanto, per $H = K$, la $\frac{HA}{AB-1}$ diventa riducibile.

Il teorema V ovviamente non è valido per ogni base B , e si dimostra che vale soltanto per $B = 3$, $B = 4$ e $B = 6$. Per tale dimostrazione basta tener presente il teorema VI e far vedere quindi che i numeri $AB - 1$, sono tutti primi soltanto per $B = 3$, $B = 4$ e $B = 6$.

Incominciamo col far vedere che se $\varphi(B) > 2$ i numeri $AB - 1$, per ogni intero $A < B$, non sono tutti primi. Infatti se $\varphi(B) > 2$, dove $B \geq 3$, oltre ai numeri 1 e $B - 1$, primi con B , vi è almeno un numero m , distinto da 1 e $B - 1$, primo con B . Presi comunque m termini consecutivi della progressione aritmetica

$$(7) \quad B - 1, \quad 2B - 1, \dots, (B - 1)B - 1,$$

essi formano un sistema completo incongruo rispetto al modulo m , pertanto fra questi m termini, per un noto teorema, ve n'è uno divisibile per m , ma poichè per ipotesi $m < B - 1$, questo termine è necessariamente multiplo di m e quindi almeno uno dei termini (7) non è primo.

Per quanto dimostrato è evidente che bisogna ricercare i valori di B per i quali i termini (7) risultino tutti primi, solo fra quei valori di B che soddisfano la relazione $\varphi(B) \leq 2$.

Ricordiamo la formola di GAUSS, se $B = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$, con $\alpha_i > 0$, è:

$$(8) \quad \varphi(B) = p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \dots p_r^{\alpha_r-1} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_r - 1).$$

Affinchè $\varphi(B) = 1$ è necessario, dato che tutti i fattori di (8) sono necessariamente disuguali, che nella (8) compaia un solo fattore uguale ad 1; vi sono due possibilità:

$$\varphi(B) = p_1^{\alpha_1-1} = 1 \quad \text{oppure} \quad \varphi(B) = p_1 - 1 = 1;$$

dove è rispettivamente $B = p_1^{\alpha_1}$ e $B = p_1$; la prima è soddisfatta per $p_1 = 1$, da cui $B = p_1^{\alpha_1} = 1$; la seconda è soddisfatta per $p_1 = 2$, da cui $B = p_1 = 2$.

Entrambi i risultati trovati non hanno per noi alcun significato dato che deve essere $B \geq 3$.

Affinchè $\varphi(B) = 2$ è necessario che nella (8) compaiano solo due fattori, uno uguale ad 1, l'altro uguale a 2.

Si hanno le seguenti possibilità

$$\varphi(B) = p_1^{\alpha_1-1} (p_1 - 1) = 2 \quad \text{oppure} \quad \varphi(B) = (p_1 - 1)(p_2 - 1) = 2$$

dove è rispettivamente $B = p_1^{\alpha_1}$ e $B = p_1 p_2$.

Per la prima relazione si hanno i due sistemi:

$$\begin{cases} p_1^{\alpha_1-1} = 1 \\ p_1 - 1 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} p_1^{\alpha_1-1} = 2 \\ p_1 - 1 = 1 \end{cases}$$

il primo ci dà $p_1 = 3$ e $\alpha_1 = 1$, per cui $B = p_1^{\alpha_1} = 3$, il secondo ci dà $p_1 = 2$ e $\alpha_2 = 2$, per cui $B = p_1 p_2 = 2^2 = 4$.

Per la seconda relazione si ha l'unico sistema:

$$\begin{cases} p_1 - 1 = 1 \\ p_2 - 1 = 2 \end{cases}$$

esso ci dà $p_1 = 2$ e $p_2 = 3$, per cui $B = p_1 p_2 = 6$.

Si verifica facilmente che per tutti e tre questi valori: $B = 3$, $B = 4$ e $B = 6$, i numeri (7) sono tutti primi, infatti si ha rispettivamente 2, 5; 3, 7, 11; 5, 11, 17, 23, 29.

Affinchè la (6) abbia carattere generale, basta sostituire alla (1) l'equazione

$$(9) \quad \frac{B^{n-1} + B^{n-2}x_{n-1} + \dots + Bx_2 + x_1}{B^{n-1}x_{n-1} + B^{n-2}x_{n-2} + \dots + Bx_1 + 1} = x_0,$$

che si è ottenuta dalla (1) ponendo $x_n = 1$, infatti le soluzioni di questa equazione sono date dai periodi dei numeri generati dalla frazione irriducibile $\frac{A}{AB-1}$ (teor. III).

Si ha pertanto:

V'. - L'equazione (9) è risolvibile solo per quei valori di n per i quali è verificata la (6).

Siamo ora in grado di stabilire sotto quale condizione $H \cdot N_1$ è semplice, se è semplice N_1 . Si ha in proposito il seguente teorema:

VII. - Se $AB - 1$ è un numero primo, detta N_1 la soluzione semplice relativa a $x_n = 1$, anche la soluzione $H \cdot N_1$ ($1 \leq H < B$) è semplice.

Dim.: Poichè, se $AB - 1$ è primo, la $\frac{HA}{AB-1}$ è irriducibile per ogni H (teor. VI), il numero delle cifre del periodo dei numeri da essa generati (periodi che sono le soluzioni della (1) per $x_n = H$) è dato, in ogni caso, dal $gss(AB-1, B)$. La condizione non è necessaria.