
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Relazioni.

* L'opera matematica di Renato Caccioppoli.

* Colloquio sui fondamenti algebrici e topologici della geometria, (Lucio Lombardo Radice)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 14
(1959), n.4, p. 548–553.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_4_548_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RELAZIONI

L'opera matematica di Renato Caccioppoli.

Negli scritti matematici di RENATO CACCIOPPOLI l'aspetto che colpisce per primo è l'estrema concisione di stile, grazie alla quale una impensata ricchezza di idee viene condensata talvolta in brevissimo spazio; ma essi sono soprattutto degni di suscitare il più grande interesse, perchè, in ogni teoria che toccano, colgono sempre l'elemento veramente essenziale, mettono in luce la prima radice delle cose, spesso nascosta ai nostri occhi da ingombranti sovrastrutture irte di ardue difficoltà, e che invece sembra rivelarsi senz'alcuno sforzo e col fascino di una sorprendente semplicità all'intuizione acutissima di CACCIOPPOLI.

Uno degli esempi più brillanti di ciò è offerto dalla teoria, ancor oggi non abbastanza nota, delle funzioni che CACCIOPPOLI chiama pseudoanalitiche (da non confondersi con le funzioni che da altri matematici contemporanei sono state indicate con lo stesso nome): in una memoria delle «Ricerche di Matematica» del 1953, di una ventina di pagine appena (uscita in seguito a quattro brevi note del 1952, due nei «Comptes Rendus» e due nei «Rendiconti dei Lincei»), i teoremi di PICARD, SCHOTTKY, LANDAU, MONTEL e quelli sulle coppie di funzioni uniformizzanti una equazione algebrica fra due variabili complesse vengono riottenuti in maniera autonoma, come casi particolarissimi di enunciati riguardanti una classe di funzioni molto più ampia di quella delle funzioni analitiche di una variabile complessa, e solo topologicamente equivalente a questa, onde si rivela il sostrato metrico-topologico di quei famosi teoremi, vedendosi che essi discendono già da un sistema di relazioni qualitative, senza che vi sia bisogno di supporre verificate relazioni quantitative, quali sono le equazioni di monogenia.

Nella teoria delle funzioni di due variabili complesse, CACCIOPPOLI scopre ancora fatti tanto semplici quanto importanti: basterà ricordare il teorema, che, come riconosce MONTEL, domina la teoria delle famiglie normali di tali funzioni — e cioè che una famiglia normale rispetto a ciascuna variabile separatamente è normale rispetto al complesso delle variabili —, il risultato fon-

damentale che l'insieme delle singolarità di una funzione analitica di due variabili complesse è un continuo nel piano metrico-proiettivo complesso, una elegante estensione alle funzioni di due variabili complesse della teoria dell'indicatore logaritmico.

Assai numerosi e importantissimi sono poi, com'è ben noto, i risultati concernenti la teoria delle equazioni alle derivate parziali nelle opere di CACCIOPPOLI, e tutti contenuti in appena una dozzina di brevi lavori, in gran parte note lincee (poco più di un centinaio di pagine complessivamente) pubblicati fra il 1930 e il 1939, oltre a una memoria del 1951 nel «Giornale di Matematiche». Hanno assai contribuito a diffondere la conoscenza di essi sia la recente monografia di MIRANDA negli «Ergebnisse der Mathematik», sia il fatto che ad essi si sono ispirati successivamente moltissimi lavori di altri. La singolare genialità di CACCIOPPOLI è ben evidente anche qui, dove lo vediamo, guidato da considerazioni generalissime e intuitivamente semplici di topologia funzionale, stabilire talvolta in pochi tratti ciò che altri anche illustri matematici non erano riusciti ad ottenere, oppure avevano conseguito solo a costo di ponderose memorie: intendo riferirmi, per esempio, ai teoremi d'esistenza degli integrali abeliani su una superficie di RIEMANN, ai teoremi d'esistenza nei problemi al contorno per equazioni ellittiche del second'ordine, lineari e non lineari, nelle condizioni più generali, alla dimostrazione dell'esistenza di una superficie chiusa convessa di data metrica. La memoria del 1951 è dedicata poi alla determinazione di limitazioni integrali per le soluzioni delle equazioni lineari ellittiche, che si sono subito rivelate utilissime agli studiosi specialisti di tali argomenti.

Alla teoria dell'integrazione e derivazione, delle funzioni additive d'insieme, dei funzionali lineari sono dedicati numerosi lavori, molti di questi fra i primi in ordine di tempo, non certo meno ricchi dei successivi di idee originali e feconde: ricorderò fra le altre la memoria del 1928 nei «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», nella quale una completa teoria dell'integrazione definita viene fondata su basi suggestivamente generali ed astratte, le ricerche pubblicate in alcune note dei «Rendiconti dell'Accademia di Napoli» del 1928 e 1929 sull'estrapolazione delle funzioni additive d'insieme e una conseguente estensione dell'operazione di totalizzazione, sulla differenziabilità asintotica delle funzioni di due variabili, sugli integrali impropri di STIELTJES, con la relativa estensione del teorema di VITALI per il passaggio al limite sotto al segno di integrale, e infine l'ultimo dei lavori pubblicati da CACCIOPPOLI, la memoria degli «Annali di Matematica» dedicata a PICONE nel 1955. In questa viene data una interessantis-

sima estensione delle nozioni fondamentali classiche nella teoria dell'integrazione e della totalizzazione, insieme coi principali teoremi relativi, basandosi su una originale definizione costruttiva di integrale di STIELTJES con funzione determinante supposta soltanto continua; ne risulta in particolare la risoluzione di un problema posto da LEBESGUE, quello della costruzione di una funzione a partire dalla sua derivata rispetto a una data funzione supposta soltanto continua, problema per cui già nel 1934 per la prima volta dallo stesso CACCIOPPOLI (e nel medesimo anno indipendentemente anche da PETROVSKY) era stato provato in una breve nota negli «Atti dell'Accademia di Padova», che l'eventuale soluzione doveva essere unica, a meno di una costante.

Sempre nel campo delle funzioni di variabile reale, meritano una menzione a parte le ricerche di CACCIOPPOLI sulla quadratura delle superficie, il cambiamento delle variabili negli integrali doppi, gli integrali doppi del calcolo delle variazioni in forma parametrica, la rappresentazione conforme delle superficie. Già in una nota lineea del 1927 e in una del 1928 sulle coppie a variazione limitata nei «Rendiconti dell'Accademia di Napoli», si trovano stabiliti tutti gli elementi essenziali di una teoria della quadratura delle superficie in condizioni di generalità affatto naturali; sono degli stessi anni varie altre note lincee e dei «Rendiconti dell'Accademia di Napoli», una comunicazione al Congresso internazionale di Matematica di Bologna, una breve memoria sui *Mathematische Annalen*, tutti lavori connessi alla nozione di area per una superficie, nei quali si trova anche l'applicazione al cambiamento delle variabili negli integrali doppi e alla formula di STOKES, nonchè il risultato che una superficie soltanto quadrabile, pur potendo non avere quasi dappertutto piano tangente, è però sempre dotata quasi dappertutto di piano approssimativamente tangente. Una esposizione di insieme è uscita poi in una memoria dei «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo» del 1930, mentre la semicontinuità degli integrali doppi è studiata in una memoria degli «Atti dell'Istituto Veneto» del 1934 e la rappresentazione conforme in due note lincee del 1935 e 1936. Nel 1952, in alcune note lincee, CACCIOPPOLI è poi tornato sull'argomento (che nel frattempo era stato oggetto di vaste e complesse trattazioni e di numerose ricerche speciali, principalmente negli Stati Uniti d'America), mostrando come l'impostazione da lui data fin da venticinque anni prima alla teoria della quadratura delle superficie fosse suscettibile di una naturale estensione, consistente in una teoria, generale e semplice al possibile, della misura e dell'integrazione su varietà parametriche orientate a un numero qualsiasi di dimensioni, immerse in uno spazio di dimensione

maggiore, e giungendo fra l'altro a stabilire, nel loro campo naturale di validità, le formule integrali classiche di GAUSS-GREEN e di STOKES.

Oltre a tutto ciò, una folla di altri risultati anche notevolissimi si trovano stabiliti, sempre con la solita penetrante intuizione, in lavori riguardanti vari argomenti, fra cui mi limiterò a ricordare gli sviluppi in serie di LAPLACE e di funzioni ipersferiche, il comportamento asintotico degli integrali di equazioni differenziali lineari, i funzionali analitici, le funzioni quasi-analitiche.

Molte delle idee contenute in questa produzione, vastissima se pur relativamente poco voluminosa, meritano di essere ancora approfondite e sviluppate; esse non mancheranno di ispirare nuovi ricercatori, e non è dubbio che la grandezza dell'opera matematica di CACCIOPPOLI apparirà sempre meglio, quanto più ampio e meditato diverrà lo studio di essa negli anni a venire.

Colloquio sui fondamenti algebrici e topologici della geometria.

(Utrecht, 3-8 agosto 1959).

Il Colloquio, patrocinato dall'I.M.U., e ottimamente organizzato sotto tutti i punti di vista dal prof. H. FREUDENTHAL e dai suoi collaboratori, ha visto una numerosa e qualificata partecipazione internazionale, soprattutto tedesca e nordamericana (scarsa invece la partecipazione di matematici latini: il belga TITS, e gli italiani BARLOTTI e LOMBARDO-RADICE). Il contenuto del colloquio è stato prevalentemente algebrico; se non andiamo errati, dei fondamenti topologici della geometria si sono occupati solo pochi oratori (NAGANO, GUGGENHEIMER, e solo in relazione a « corpi ternari » SALZMANN e HOFMANN). Per questo motivo, e anche perchè la « competenza » di chi scrive questo resoconto è prevalentemente algebrica, ci limiteremo a passare, assai succintamente, in rassegna i contributi algebrico-geometrici; trascureremo pertanto non solo le comunicazioni topologiche alle quali si è fatto cenno, ma anche altri — pur interessanti — interventi su problemi particolari relativi ai fondamenti della geometria (BUSEMAN, KIJNE, VELDKAMP, BENZ e altri).

Ci sembra che due ordini di questioni abbiano caratterizzato il Convegno, e precisamente: 1) Fondamenti gruppali della geometria; 2) Introduzione di coordinate « generali » (in particolare, algebre legate ai piani proiettivi non arguesiani). Non ci si stupisca dell'assenza di comunicazioni relativi ad algebre di LIE: in-

fatti gli organizzatori avevano espressamente invitato i partecipanti a fissare la loro attenzione su algebre non associative *non* di LIE. Con l'espressione «fondamenti gruppali della geometria» intendiamo riferirci a un vasto, vario e suggestivo campo di ricerca, che ci sembra oggi in pieno sviluppo, nel quale l'idea centrale appare quella della «geometrizzazione» di determinate classi di gruppi, cioè della associazione ad essi di una «geometria» (in un certo senso, il processo inverso del classico passaggio da una geometria a un gruppo ad essa relativo). Ci sembra di poter includere in questo ordine di idee i «Gruppi algebrici semi-semplfici e le geometrie ad essi associate» di cui ha parlato TITS; i «quadrati magici» composti da gruppi, completando uno dei quali FREUDENTHAL è pervenuto alla sua brillante costruzione di una nuova geometria, la «metasimplettica»; le tre strutture geometriche derivate da un gruppo abeliano con operatori da R. BAER, e cioè la geometria affine, quella proiettiva, quella da lui chiamata di HJELMSLEV; le considerazioni di A. M. GLEASON sui «Gruppi di omeomorfismi».

Tutte queste vedute portano a generalizzare il concetto stesso di geometria; per questo motivo, e anche semplicemente per unificare e armonizzare l'introduzione di coordinate in geometrie più classiche, numerosi ricercatori sono portati a studiare, o a ideare, domini di coordinate più generali dei classici campi e corpi. Per esempio, la generalizzazione data da von NEUMANN del classico procedimento hilbertiano per la «coordinatizzazione» di una geometria proiettiva di dimensione non inferiore a 3, esclude il caso delle geometrie proiettive piane, che presenta la nota eccezione desarguesiana: di qui è partito I. HALPERIN, nella sua relazione sui «Reticoli modulari complementati», per costruire una ulteriore generalizzazione del teorema di von NEUMANN. — Considerando «geometrie proiettive con omomorfismo» (cioè, per dirla brevemente, geometrie che hanno per immagine omomorfa una geometria proiettiva ordinaria), W. KLINGENBERG è portato a introdurre, come anelli di coordinate, certi «anelli locali» che includono i corpi (eventualmente non commutativi). Naturalmente, in queste geometrie di KLINGENBERG non sono sempre verificati gli ordinari assiomi dell'incidenza; ciò accade anche per gli «spazi proiettivi deboli» di EWALD e per gli «spazi affini generalizzati» di SPERNER. Questi due studiosi, lo SPERNER e l'EWALD, si sono «incontrati» — per così dire — a Utrecht sul medesimo problema: definire una generalizzazione dello spazio proiettivo (affine) tridimensionale, che possieda (eventualmente) come spazi subordinati bidimensionali dei piani non arguesiani. — LOMBARDO-RADICE si è occupato di quelle «coordinate generali» che sono i corpi ter-

nari di HALL, e ha poi passato in rassegna altre algebre ternarie recentemente introdotte.

Uno dei motivi che inducono alla costruzione di anelli di coordinate più generali dei corpi è la esistenza di piani non arguesiani, non « coordinatizzabili » con elementi di un corpo; perciò il fervore attuale di ricerche attorno alle geometrie non arguesiane ci sembra una componente dello sforzo (del quale ora si è detto) tendente a una unificazione della geometria, per ottenere la quale è necessario rimuovere, o meglio « inglobare », l'eccezione non arguesiana. Di questo fervore sono state testimonianza, a Utrecht, numerose e significative conferenze e comunicazioni. DEMBOSKI ha studiato i piani non arguesiani finiti facendoli rientrare in una classe più generale di schemi combinatori; ASCHER WAGNER, sempre nel caso finito, partendo da un numero relativamente basso di collineazioni centrali è riuscito a concludere che un piano è desarguesiano; HUGHES ha passato in rassegna le classi note di piani non arguesiani finiti e le notizie che finora si hanno sui loro gruppi di collineazioni; SALZMANN e HOFMANN hanno stabilito relazioni tra assiomi algebrici del corpo ternario delle coordinate e caratteri topologici, nel caso dei piani proiettivi « topologici », mentre KARZEL ha sviluppato la teoria dei piani proiettivi ordinati (e omettiamo comunicazioni di argomento più ristretto, come quelle di SMILEY e SPRINGER).

Per quanto i lavori siano stati intensi, i partecipanti hanno avuto ampia possibilità di avere tra di loro quelle conversazioni amichevoli che sono, come è ben noto, altrettanto importanti quanto le conferenze e le comunicazioni ufficiali. Trascorrendo qualche serata con giovani studiosi stranieri, in particolare tedeschi, siamo restati colpiti dall'alto livello *medio* di preparazione algebrica e topologica dei giovani appena « addottorati », o non ancora « dottori », di alcune Università (Francoforte, Amburgo, Tubinga e altre). Non parliamo dei « geni », i quali — in definitiva — non hanno neppur stretto bisogno di frequentare una Università; parliamo della preparazione *media* dei giovani avviati alla carriera scientifica. Crediamo di avere individuato due cause di una tale ottima *preparazione di base* nei seguenti fatti:

1°) importanti nozioni di algebra generale (cosiddetta « moderna ») e di topologia fanno parte ormai del biennio propedeutico; 2°) nel secondo biennio, gli studenti studiano i fondamenti di un maggior numero di teorie moderne di quel che non facciano i nostri studenti, sia per la suddivisione in semestri, che raddoppia il numero dei corsi, sia per la più sistematica organizzazione dei Seminari.

LUCIO LOMBARDO-RADICE