Bollettino Unione Matematica Italiana

Angelo Pistoia

Trasformate di funzioni di ripartizione.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.4, p. 537–542.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_4_537_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1959.

Trasformate di funzioni di ripartizione.

Nota di ANGELO PISTOIA (a Milano)

Sunto. - *Si caratterizzano i nuclei* K(x, t) *per i quali* $K(\mathfrak{R}) \subseteq \mathfrak{C}$ *essendo* $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{R}$, $K(\mathfrak{R})$ *le classi di funzioni definite nel* § 1.

Summary. - *The A. characterise the kernels* K(x, t) *for which* $K(\mathfrak{R}) \subseteq \mathfrak{C}$ *where* $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{R}$, $K(\mathfrak{R})$ *are defined in* § 1.

1. Consideriamo le classi $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{R}$ ed Ω definite nel modo seguente:

$\mathfrak{R}$ è la classe delle *funzioni di ripartizione*: cioè delle funzioni $F(t)$ mai decrescenti, continue a destra e per le quali $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ è la classe delle *funzioni* f(x), *caratteristiche:*

$$(1) \qquad \begin{cases} f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(t) \\ F \in \mathfrak{R}, \; x \in I_x \equiv (-\infty < x < +\infty). \end{cases}$$

Ω è la classe delle funzioni $K(x, t)$, (con $K(0, t) = 1$ per ogni $t \in I_t$), *limitate* in $E \equiv (-\infty < x, \; t < +\infty)$, *B-misurabili* come funzioni di t, per ogni $x \in I_x$, *continue* come funzioni di x, nell'intervallo I_x, per ogni $t \in I_t$ escluso, al più, un insieme σ_t di misura nulla su I_t.

Posto

$$(2) \qquad \begin{cases} \psi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) dF(t) \\ F \in \mathfrak{R}; \quad K \in \Omega; \quad x \in I_x \end{cases}$$

consideriamo infine la classe $K(\mathfrak{R})$ delle funzioni $\psi(x)$ trasformate, secondo la (2), delle $F \in \mathfrak{R}$.

(Per ogni $F \in \mathfrak{R}$, $K \in \Omega$, la $\psi(x)$, definita dalla (2), è continua e limitata in I_x.

Infatti, dalla ipotesi $|K(x, t)| \leq M$ in E, segue, per ogni $x \in I_x$,

$$|\psi(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |K(x, t)| \, dF(t) \leq M \int_{-\infty}^{\infty} dF(t) = M.$$

Risulta poi, per ogni $x_0 \in I_x$, (1),

$$\lim_{x \to x_0} \psi(x) = \lim_{x \to x_0} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) dF(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x_0, t) dF(t) = \psi(x_0)).$$

2. Ciò premesso dimostriamo il seguente TEOREMA.

$K(\mathfrak{R}) \subseteq \mathfrak{C}$ se e solo se $K(x, t) \in \mathfrak{C}$ per ogni $t \in I_t - \sigma_t$.

Se $K(x, t) \in \mathfrak{C}$ per ogni $t \in I_t - \sigma_t$, allora risulta, per un teorema di BOCHNER, (2).

$$\sum_{1}^{n}{}_{p,\,q} K(x_p - x_q, t) u_p \bar{u}_q \geq 0 \tag{3}$$

(come di consueto $\bar{z}$ denota il coniugato del numero complesso z) per ogni $t \in I_t - \sigma_t$ e qualunque siano l'intero n, i numeri reali x_p, i numeri complessi u_p.

Ne segue, comunque si prenda F in R e per la scelta già precisata di n, x_p, u_p,

$$\sum_{1}^{n}{}_{p,\,q} \psi(x_p - x_q) u_p \bar{u}_q = \tag{4}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{1}^{n}{}_{p,\,q} K(x_p - x_q, t) u_p \bar{u}_q \right\} dF(t) =$$

$$= \int_{I_t - \sigma_t} \{ \ldots \} \, dF(t) \geq 0.$$

(1) Cfr., ad es., CRAMÉR H., *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton Univ. Press, 1946, 67.

(2) Cfr., ad es., LEVY P., *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gautier-Villar, Paris, 1937, 39.

Essendo poi $\psi(0) = 1$, dalla (4) e dal teorema di Bochner cui si accennava a proposito della (3), scende la tesi.

Supponiamo ora che $K(\mathfrak{R}) \subseteq \mathfrak{C}$. Risulta allora, [3],

$$(5) \qquad \sum_{1}^{n}{}_{p,\,q}\, \psi(x_o - x_q) u_p \bar{u}_q =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{ \sum_{1}^{n}{}_{p,\,q}\, K(x_p - x_q,\ t) u_p \bar{u}_q \Big\} dF(t) \geq 0$$

comunque si prenda F in $\mathfrak{R}$ e qualunque siano l'intero n, i numeri reali x_p, i numeri complessi u_p.

In particolare, indicando con $\{ x_{p_1},\ \alpha_{p_1},\ \beta_{p_1} \}$ i valori che competono ad una scelta arbitraria di $\{ x_p,\ \alpha_p,\ \beta_p \}$ nella classe dei numeri *razionali* e posto $u_{p_1} = \alpha_{p_1} + i\beta_{p_1}$, sarà

$$(6) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{ \sum_{1}^{n}{}_{p_1 q_1}\, K(x_{p_1} - x_{q_1},\ t) u_{p_1} \bar{u}_{q_1} \Big\} dF(t) \geq 0$$

comunque si prenda F in $\mathfrak{R}$ e qualunque sia l'intero n.

Data l'arbitrarietà della F, la (6) implica l'esistenza di un insieme σ_{t_1}, di misura nulla su I_t, tale da aversi

$$(7) \qquad S_1 = \sum_{1}^{n}{}_{p_1 q_1}\, K(x_{p_1} - x_{q_1},\ t) u_{p_1} \bar{u}_{q_1} \geq 0$$

per ogni $t \in I_t \quad \sigma_{t_1}$, [4].

[3] V. la [2].

[4] Per provare la (7) basta estendere un classico ragionamento del calcolo delle variazioni.

Se σ_{t_1} non esistesse si avrebbe allora $S_1 < 0$ in un insieme σ di misura positiva su I_t.

Possiamo anche supporre σ chiuso e limitato, $\sum_{1}^{n}{}_{p_1,\,q_1} K(x_{p_1} - x_{q_1},\ t) u_{p_1} \bar{u}_{q}$ continua in σ.

Siano poi t_1 e t_2 le ascisse minima e massima di σ: λ il plurintervallo aperto formato dai punti di $t_1 \overline{} t_2 \notin \sigma$; $\mu = \max_{t \in \sigma} \{ \sum_{1}^{n}{}_{p_1,\,q_1} K(x_{p_1} - x_{q_1},\ t) u_{p_1} \bar{u}_{q_1} \}$, — si noti che è $\mu < 0$.

Facciamo ora variare $\{x_p, \alpha_p, \beta_p\}$ nella classe (Γ) dei numeri *razionali.*

Ad ogni scelta (τ) di $\{x_p, \alpha_p, \beta_p\}$ in (Γ) è pertanto possibile associare un insieme σ_{t_τ} (di misura nulla su I_t) tale che dalla ipotesi:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\sum_1^n{}_{p_\tau q_\tau} K(x_{p_\tau}-x_{q_\tau},\ t)u_{p_\tau}\bar{u}_{q_\tau}\Big\}\, dF(t)\geq 0,$$

comunque si prenda F *in* $\mathfrak{R}$ *e qualunque sia l'intero* n,

segua:

$$\sum_1^n{}_{p_\tau q_\tau} K(x_{p_\tau}-x_{q_\tau},\ t)u_{p_\tau}\bar{u}_{q_\tau}\geq 0$$

per ogni $t\in I_t-\sigma_{t_\tau}$.

Per l'arbitrarietà della F, la (5) implica dunque che sia

$$\sum^n{}_{p,\,q} K(x_p-x_q,\ t)u_p u_q\geq 0$$

per ogni $t\in I_t-\sigma_t$ $(\sigma_t=\bigcup_\tau\sigma_{t_\tau})$ e qualunque siano l'intero n ed i numeri *razionali* x_p, α_p, β_p con $u_p=\alpha_p+i\beta_p$.

Ciò premesso riprendiamo la (5) associando ai numeri reali x_p, α_p, β_p, $(u_p=\alpha_p+i\beta_p)$, una successione di numeri razionali $\{\xi_{p_n}, \lambda_{p_n}, \gamma_{p_n}\}\to\{x_p, \alpha_p, \beta_p\}$.

Dalla (5) e da quanto precede scende allora, per ogni $t\in I_t-\sigma_t$, $(u_{p_k}=\lambda_{p_k}+i\gamma_{p_k})$,

$$\sum_1^n{}_{p_k q_k} K(\xi_{p_k}-\xi_{q_k},\ t)u_{p_k}\bar{u}_{q_k}\geq 0$$

Ciò premesso scegliamo $F(t)$ ponendo

$$\begin{array}{ll} F(t)=0 & \text{per}\quad t\leq t_1,\\ F(t)=1 & \text{per}\quad t\geq t_2,\\ F'(t)=0 & \text{per}\quad t\in\lambda,\\ F'(t)=\dfrac{1}{\text{mis}\,(\sigma)} & \text{per}\quad t\in\sigma. \end{array}$$

Per tale scelta di $F(t)$ sarà allora

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\sum_1^n{}_{p_1 q_1} K(x_{p_1}-x_{q_1},\ t)u_{p_1}\bar{u}_{q_1}\Big\}\, dF(t)=\frac{1}{\text{mis}\,(\sigma)}\int_\sigma\{\ldots\}\,dt\leq\mu<0$$

contro la (6).

e quindi anche, per la continuità di $K(x, t)$ in I_x,

$$\sum_{1}^{n}{}_{p,\,q} K(x_p - x_q,\ t) u_p u_q \geq 0$$

cioè la tesi per il teorema di BOCHNER cui si accennava a proposito della (3).

3. Dal teorema dimostrato nel § 2 scendono due corollari dei quali, il primo, è ben noto nel calcolo delle probabilità [5].

COROLLARIO I. - *Se* $f(x) \in \mathfrak{C}$ *allora*

$$\psi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(\tau)d\tau = \int_0^1 f(tx)dt \in \mathfrak{C}.$$

Infatti $K(x, t) = f(tx) \in \mathfrak{C}$ per ogni $t \in I_t$, [6], e la funzione

$$F(t) = \begin{cases} t & \text{per } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{per } t \geq 1 \\ 0 & \text{per } t \leq 0 \end{cases}$$

$\in \mathfrak{R}$, come è evidente.

COROLLARIO II. - *Posto*

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x \cos \tau)d\tau, \tag{8}$$

$$\begin{cases} f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(t) \\ F \in \mathfrak{R}, \end{cases} \tag{9}$$

[5] Cfr. ad es., GIRAULT M., *Transformation de fonctions caract. par integration*, « C. R. A. Sc. Paris, 238, 1954, 2223, 24.

[6] Cfr., ad es., LOEVE M., *Probability theory*, Van Nostrand 1955, 194.

la funzione

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} J_0(tx) dF(t) \in \mathfrak{C} \tag{10}$$

e risulta

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} R \{ f(x \cos t) \} dt, \tag{11}$$

(come di consueto $R(z)$ denota la parte reale di z).

Posto

$$F(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} t & \text{per } 0 \leq t \leq \pi \\ 1 & \text{per } t \geq \pi \\ 0 & \text{per } t \leq 0, \end{cases}$$

$$K(x, t) = \cos (x \cos t) =$$

$$= \frac{1}{2} \{ e^{ix \cos t} + e^{-ix \cos t} \}$$

dal teorema del § 2 scende che $J_0(x) \in \mathfrak{C}$ perchè $F \in \mathfrak{R}$, $K(x, t) \in \mathfrak{C}$ per ogni $t \in I_t$. Siccome poi $J_0(tx) \in \mathfrak{C}$ per ogni $t \in I_t$, sempre per il teorema del § 2 resta provata la (10).

Risulta infine, per la (8), la (10) e per essere $F(t)$ a variazione finita

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} J_0(tx) dF(t) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dF(t) \int_0^{\pi} \cos (tx \cos \tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \cos (tx \cos \tau) dF(t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \{ f(x \cos \tau) + f(-x \cos \tau) \} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} R \{ f(x \cos \tau) \} d\tau$$

essendo, come è ben noto. $f(-x) = \bar{f}(x)$ per ogni $x \in I_x$.