Bollettino Unione Matematica Italiana

Baltasar R.-Salinas

Equivalenza di classi di funzioni con sviluppo asintotico in un angolo. Funzioni caratteristiche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.4, p. 525–531.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_4_525_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1959.

Equivalenza di classi di funzioni con sviluppo asintotico in un angolo. Funzioni caratteristiche.

Nota di BALTASAR R.-SALINAS (a Saragozza)

Sunto. - *Si danno condizioni necessarie e sufficienti perchè due classi di funzioni analitiche che ammettono uno sviluppo asintotico* $\overset{\infty}{\Sigma}\, a_n z^n$ *in un angolo siano equivalenti.*

Summary. - *Necessary and sufficient conditions are given for two classes of analitic functions with an asymptotic expansion* $\sum_1^\infty a_n z^n$ *in an angle being equivalents.*

Data una regione Ω contenuta in un angolo $|\arg z| < \alpha\pi/2$ della superficie di RIEMANN di log z con il punto frontiera $z = 0$ e una successione positiva $\{m_n\}$ indicheremo con $K_0\{m_n;\ \Omega\}$ la classe di funzioni f, analitiche in Ω, che ammettono uno sviluppo asintotico $\sum_0^\infty a_n z^n$ in Ω, in maniera che

$$(1) \qquad |f(z) - \sum_0^{n-1} a_\nu z^\nu| \leq A q^n m_n |z|^n \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

per ogni $z \in \Omega$ ed alcuna costante A e q dipendenti da f.

Questo lavoro ha per oggetto principale stabilire le condizioni che debbono soddisfare due successioni positive $\{m_n'\}$ e $\{m_n''\}$ affinchè

$$K_0\{m_n';\ \Omega\} = K_0\{m_n'';\ \Omega\}$$

nel caso che Ω sia un angolo A_α: $|\arg z| < \alpha\pi/2$ di apertura $\alpha\pi \leq 2\pi$.

Questioni analoghe sono state studiate da GORNY [3], H. CARTAN [2], BANG [1] e MANDELBROJT [4] per le classi di funzioni indefinitamente derivabili nella retta, nella semi-retta $x > 0$ e in un intervallo.

Conviene tener presente qui una disuguaglianza che abbiamo trovato in [6]. Se f è una funzione complessa, definita in un angolo A_α di apertura $\alpha\pi \leq 2\pi$ e con lo sviluppo asintotico $\sum_0^\infty a_n z^n$, e se

$$(2) \qquad M_n = M_n(f) = \operatorname*{Sup}_{z \in A_\alpha} \left| \frac{f(z) - \sum_0^{n-1} a_n z^n}{z^n} \right| \qquad (n = 0,\ 1,\ 2 \ldots)$$

e

$$B_n = n^{(2-\alpha)n} M_n \qquad (B_0 = M_0),$$

si ottiene

$$(3) \qquad B_n \leq A q^n B_{n_1}^{\frac{n_2 - n}{n_2 - n_1}} B_{n_2}^{\frac{n - n_1}{n_2 - n_1}}$$

per $n_1 \leq n \leq n_2$ con $A = 5$ e $q = 2(e + 1)^{2-\alpha}$ (¹).

Teorema 1. - *Sia* $0 < \alpha \leq 2$. a) *Se*

$$\varliminf_n \frac{\sqrt[n]{m_n}}{n^{\alpha-2}} = 0,$$

la classe $K_0 \{ m_n ;\ A_\alpha \}$ *contiene soltanto funzioni costanti.*

b) *Se*

$$0 < \varliminf_n \frac{\sqrt[n]{m_n}}{n^{\alpha-2}} = \lambda < \infty,$$

la classe $K_0 \{ m_n ;\ A_\alpha \}$ *coincide con la* $K_0 \{ n^{(\alpha-2)n} ;\ A_\alpha \}$.

c) *La classe* $K_0 \{ n^{(\alpha-2)n} ;\ A_\alpha \}$ *contiene funzioni non costanti.*

Dimostrazione. - La prima parte risulta immediatamente applicando (3) a ciascuna f di $K_0 \{ m_n ;\ A_\alpha \}$ con $n_1 = 0$, $n = 1$ e $n_2 = n_\nu$, essendo $\{ n_\nu \}$ una successione tale che

$$\lim_\nu \frac{\sqrt[n_\nu]{m_{n_\nu}}}{n_\nu^{\alpha-2}} = 0.$$

b) Applicando la stessa disuguaglianza (3) ad ogni funzione f di $K_0 \{ m_n ;\ A_\alpha \}$ con $n_1 = 0$ e $n_2 = n_\nu \to \infty$, essendo $\{ n_\nu \}$ una

(¹) Abbiamo in preparazione un lavoro in cui otteniamo disuguaglianze simili per ragioni limitate.

successione tale che

$$\lim_{\nu} \frac{\sqrt[n_\nu]{m_{n_\nu}}}{n_\nu^{\alpha-2}} = \lambda,$$

risulta

$$B_n \leq A(\lambda q)^n B_0 \quad \text{e} \quad M_n \leq A(\lambda q)^n n^{(\alpha-2)n} M_0 .$$

Pertanto $f \in K_0 \{ n^{(\alpha-2)n};\ A_\alpha \}$ e

$$K_0 \{ m_n;\ A_\alpha \} \subset K_0 \{ n^{(\alpha-2)n};\ A_\alpha \},$$

da dove si deduce finalmente, tenendo presente

$$\overline{\lim_n} \sqrt[n]{\frac{n^{(\alpha-2)n}}{m_n}} < \infty,$$

che entrambe le classi $K_0 \{ m_n;\ A_\alpha \}$ e $K_0 \{ n^{(\alpha-2)n};\ A_\alpha \}$ sono identiche.

c) Per concludere basta provare che la funzione f_α, definita da

$$f_\alpha(z) = \sum_0^\infty \frac{(-z)^\nu}{\Gamma[(\nu+1)\gamma+2]} \qquad (\gamma = 2 - \alpha)$$

per $0 < \alpha < 2$ e per

$$f_\alpha(z) = \frac{(1+z)\log(1+z) - z}{z^2}$$

per $\alpha = 2$, appartiene a $K_0 \{ n^{(\alpha-2)n};\ A_\alpha \}$. Ciò si ottiene tenendo presente che

$$f_\alpha(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^t}{t^\gamma + z} \frac{dt}{t^2} \qquad (a > 0)$$

per $z \in A_\alpha$ e $0 < \alpha < 2$, e

$$f_2(z) = \int_0^1 \frac{1-t}{1+zt}\, dt$$

per $z \in A_2$.

Se $\{ m_n \}$ è una successione positiva tale che

$$\underline{\lim_n} \frac{\sqrt[n]{m_n}}{n^{\alpha-2}} > 0,$$

chiameremo $\{ m_n^{(\alpha)} \}$ la successione determinata dalla condizione che $\{ n^{(2-\alpha)n} m_n^{(\alpha)} \}$ sia la regolarizzata convessa logaritmica di $\{ n^{(2-\alpha)n} m_n \}$, cioè, che $\{ \log [n^{(2-\alpha)n} m_n^{(\alpha)}] \}$ sia la regolarizzata convessa di $\{ \log [n^{(2-\alpha)n} m_n] \}$.

TEOREMA 2. – *Se* $0 < \alpha \leq 2$ *e la successione positiva* $\{ m_n \}$ *soddisfa la condizione*

$$\varliminf_n \frac{\sqrt[n]{m_n}}{n^{\alpha-2}} > 0, \text{ (}^2\text{)}$$

le classi $K_0 \{ m_n ; A_\alpha \}$ e $K_0 \{ m_n^{(\alpha)} ; A_\alpha \}$ *sono identiche.*

DIMOSTRAZIONE. – Evidentemente, essendo $m_n^{(\alpha)} \leq m_n$, si ha

$$K_0 \{ m_n^{(\alpha)} ; A_\alpha \} \subset K_0 \{ m_n ; A_\alpha \} .$$

Reciprocamente, tenendo presente (3) per ciascuna funzione f di $K_0 \{ m_n ; A_\alpha \}$ risulta

$$M_n = M_n(f) \leq A q^n m_n^{(\alpha)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

e pertanto

$$K_0 \{ m_n ; A_\alpha \} \subset K_0 \{ m_n^{(\alpha)} ; A_\alpha \} .$$

Quindi

$$K_0 \{ m_n ; A_\alpha \} = K_0 \{ m_n^{(\alpha)} ; A_\alpha \} .$$

DEFINIZIONE – *Si dice che* f *è una funzione caratteristica di una classe* $K_0 \{ m_n ; \Omega \}$ *se appartiene ad essa ma non a nessun'altra classe* $K_0 \{ m_n ; \Omega \}$ *contenuta in* $K_0 \{ m_n ; \Omega \}$.

A SAN JUAN [7] si deve il seguente:

TEOREMA 3. – *Ciascuna funzione* f, *analitica in* Ω, *che ammette uno sviluppo asintotico* $\sum_0^\infty a_n z^n$ *in* Ω *con limiti finiti*

$$M_n = \sup_{z \in \Omega} \left| \frac{f(z) - \sum_0^{n-1} a_\nu z^\nu}{z^n} \right| \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

è funzione caratteristica della classe $K_0 \{ M_n ; \Omega \}$ *ma non di nessun'altra.*

(2) Questa condizione equivale, secondo il teorema 1, a che $K_0 \{ m_n ; A_\alpha \}$ contenga funzioni non costanti.

TEOREMA 4. - *Ogni classe* $K_0 \{ m_n ; A_\alpha \}$ *possiede funzioni caratteristiche.*

DIMOSTRAZIONE. - Secondo il teorema 2 possiamo supporre che $\{ n^{(2-\alpha)n} m_n \}$ è una successione logaritmicamente convessa (3). Allora, la funzione f, definita da

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\beta_\nu}{2^\nu} \left(\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} \right)^{-\nu} f_\alpha \left(\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} z \right)$$

con

$$\beta_n = n^{(2-\alpha)n} m_n \qquad (\beta_0 = m_0)$$

è una funzione analitica in A_α che ammette lo sviluppo asintotico $\sum_0^\infty a_n z^n$ in A_α con coefficienti

$$a_n = \frac{(-1)^n s_n}{\Gamma[(n+1)\gamma + 2]}$$

per $0 < \alpha < 2$ e

$$a_n = \frac{(-1)^n s_n}{(n+1)(n+2)}$$

per $\alpha = 2$, essendo

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\beta_\nu}{2^\nu} \left(\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} \right)^{n-\nu} .$$

Questa funzione appartiene inoltre alla classe $K_0 \{ m_n ; A_\alpha \}$, dato che secondo il teorema 1 c) risulta:

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\beta_\nu}{2^\nu} \left(\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} \right)^{-\nu} \left| f_\alpha \left(\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} z \right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{s_k} \left(\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} z \right)^k \right| \leq$$

$$\leq A q^n n^{(\alpha-2)n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\beta_\nu}{2^\nu} \left(\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} \right)^{n-\nu} |z|^n =$$

$$= A q^n n^{(\alpha-2)n} s_n |z|^n$$

(3) Se

$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{m_n}}{n^{\alpha-2}} = 0$$

ciascuna funzione costante è una funzione caratteristica di $K_0 \{ m_n ; A_\alpha \}$.

per $z \in A_\alpha$ e $n = 0, 1, 2, \ldots$, con altre parole, $f \in K_0 \{ n^{(\alpha-2)n} s_n ; A_\alpha \}$, e per essere $\{ \beta_n \}$ logaritmicamente convessa è

$$\left(\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu}\right)^{n-\nu} \leq \frac{\beta_n}{\beta_\nu}$$

qualunque siano gli n e ν, e

$$s_n \leq \beta_n \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} = 2\beta_n = 2n^{(2-\alpha)n} m_n$$

per $n = 0, 1, 2, \ldots$,

Siccome d'altra parte per certe costanti positive A e q si ha

$$M_n \geq |a_n| = \frac{s_n}{\Gamma[(n+1)\gamma + 2)} \geq \frac{1}{2^n} \frac{\beta_n}{\Gamma[(n+1)\gamma + 2]} \geq \frac{m_n}{Aq^n}$$

per $\alpha < 2$ e

$$M_n \geq |a_n| = \frac{s_n}{(n+1)(n+2)} \geq \frac{1}{2^n} \frac{\beta_n}{(n+1)(n+2)} \geq \frac{m_n}{Aq^n}$$

per $\alpha = 2$, qualunque classe $K_0 \{ m_n' ; A_\alpha \}$ che contenga a f contiene anche a $K_0 \{ m_n ; A_\alpha \}$ e per conseguenza f è funzione caratteristica di $K_0 \{ m_n ; A_\alpha \}$ [4].

TEOREMA 5. - *Supponiamo* $\alpha \leq 2$, *perchè la classe* $\mathrm{K}_0 \{ \mathrm{m}_n' ; \mathrm{A}_\alpha \}$ *sia contenuta in* $\mathrm{K}_0 \{ \mathrm{m}_n'' ; \mathrm{A}_\alpha \}$ *è necessario e sufficiente che*

$$\overline{\lim_n} \sqrt[n]{\frac{m_n'^{(\alpha)}}{m_n''}} < \infty .$$

DIMOSTRAZIONE. - La condizione sufficiente è immediata tenendo presente il teorema 2. La condizione necessaria si deduce per contenere $K_0 \{ m_n'' ; A_\alpha \}$ la funzione caratteristica f di $K_0 \{ m_n' ; A_\alpha \}$ costruita nel teorema 4, che ha la proprietà che

$$\overline{\lim_n} \sqrt[n]{\frac{m_n'^{(\alpha)}}{M_n}} < \infty \qquad (M_n = M_n(f)).$$

[4] Questa dimostrazione è ispirata a quella data da BANG in [1].

COROLLARIO 1. – *Supponiamo* $\alpha \leq 2$, *perchè le classi* $K_0 \{ m'_n ; A_\alpha \}$ e $K_0 \{ m_n'' ; A_\alpha \}$ *siano identiche (o equivalenti) è necessario e sufficiente che*

$$0 < \underline{\lim}_n \sqrt[n]{\frac{m_n''^{(\alpha)}}{m_n'^{(\alpha)}}} < \infty ,$$

cioè, che $\{ m'^{(\alpha)}_n \}$ *e* $\{ m''^{(\alpha)}_n \}$ *siano esponenzialmente equivalenti.*

COROLLARIO 2. – *Supponiamo* $\alpha \leq 2$, *le funzioni caratteristiche* f *di* $K_0 \{ m_n ; A_\alpha \}$ *sono caratterizzate dalla proprietà che* $\{ m_n^{(\alpha)} \}$ *sia esponenzialmente equivalente alla successione* $\{ M_n \}$ *di limiti* $M_n = M_n(f)$ *dello sviluppo asintotico di* f *in* A_α.

OSSERVAZIONE. – *Per le classi* $C \{ m_n ; A_\alpha \}$ *di funzioni analitiche in* A_α *e tali che*

$$| f^{(n)}(z) | \leq A q^n m_n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

per certe costanti A *e* q *dipendenti da* f, *si possono dare teoremi analoghi per* $\alpha \leq 1$ *definendo la successione* $\{ m_n^{(\alpha)} \}$ *per la condizione che* $\{ n^{(1-\alpha)n} m_n^{(\alpha)} \}$ *sia la regolarizzata logaritmica convessa di* $\{ n^{(1-\alpha)n} m_n \}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BANG, T., *On quasi analytiske Funktionen*, Tesis Copenhague, 1946.

[2] CARTAN, H., *Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives*, « Act. Sc. et Ind. » n. 867, 1948.

[3] GORNY, A., *Contribution a l'étude des fonctions dérivables d'une variable réelle*, « Acta Math. » t. 71, 1939, pp. 317.

[4] MANDELBROJT, S., *Séries adhérentes. Regularisation des suites. Applications.* Paris, Gauthier-Villars, 1952.

[5] RODRIGUEZ-SALINAS, B., *Una desigualdad entre las cotas de las derivadas de una función analítica en un ángulo.* « Rev. Las Ciencias » de Madrid. Año XXIII, 1958, pp. 533.

[6] —— *Disuguaglianze tra limiti e coefficienti dello sviluppo di una funzione in un angolo*, « Annali di Matematica Pura ed Applicata », t. 48, pag. 147-159, 1959.

[7] SAN JUAN, R., *El problema de Watson y las clases semi-analiticas*, Madrid, Publicaciones del C.S.I.C., 1955.