BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Giovanni Ricci

Una osservazione sulla precedente Nota "A. Battaglia, Sull'equazione indeterminata $x^{2n} + y^{2n} = z^2$".

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.4, p. 499–500.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_4_499_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1959.

Una osservazione sulla precedente Nota « A. Battaglia, Sull'equazione indeterminata $x^{2n} + y^{2n} = z^2$ ».

Nota di GIOVANNI RICCI (a Milano)

Il sig. ANTONIO BATTAGLIA, nella sua Nota « Un caso d'impossibilità dell'equazione indeterminata $x^{2n} + y^{2n} = z^2$ », Bollettino U.M.I. (3) **12** (1957), pp. 689-694, ha dimostrato l'interessante teorema: « Non esiste alcuna terna di interi (x, y, z), tali che si abbia $x^{2n} + y^{2n} = z^2$, $(x, y, z) = 1$, $(z, n) = 1$, $x^2 + y^2 = P^{2c}$, (P primo) ».

(1) Dalla (1) si ha: $x^n = \lambda^2 - \mu^2$, $y^n = 2\lambda\mu$, $z = \lambda^2 + \mu^2$ e anche qui prefissati x, y, z, resta determinata per z la partizione unica $\lambda^2 + \mu^2$.

Nella Nota citata nel titolo, l'A. riprende l'argomento nell'intento di togliere dall'enunciato precedente la clausola limitativa « $x^2 + y^2 = P^{2c}$, (P primo) ».

Io non so se il teorema in questione, senza la clausola limitativa suddetta, sia vero oppure no: quello che si può asserire è che il sig. A. BATTAGLIA non l'ha dimostrato: infatti egli riprende il ragionamento della Nota precedente; ma, nelle condizioni più generali, quel ragionamento non si può ripetere. Precisamente, alla pag. 692 della Nota « Un caso... » si trova scritto:

« Poniamo $(\alpha p + \beta q)^2 + (\alpha q - \beta p)^2 = \lambda^2 + \mu^2$ e quindi:

$$\lambda = \alpha p + \beta q, \quad \mu = \alpha q - \beta p \tag{11}$$

oppure

$$\lambda = \alpha q - \beta p, \quad \mu = \alpha p + \beta q \text{ ».} \tag{12}$$

Ora, se $x^2 + y^2 = u^2 = P^{2c}$ e $(x, y) = 1$ risulta $P \equiv 1 \pmod 4$ e $u = P^c$ ammette una sola rappresentazione $u = \alpha^2 + \beta^2$, ma quando questa condizione non è verificata si possono presentare più rappresentazioni $u = \alpha^2 + \beta^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 = \ldots$ e potrebbe essere $\lambda = \alpha' p + \beta' q$, $\mu = \alpha' q - \beta' p$ ecc.; pertanto non è garantita la validità di (11) o (12). Con α' e β' in luogo di α e β il ragionamento seguito dall'Autore nel n. 10 cade.