
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

DEMORE QUILGHINI

**Generalizzazione di un teorema di Stokes
sul potenziale gravitazionale di una massa
fluida in equilibrio e nuovo limite della
velocità di rotazione.**

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 14
(1959), n.4, p. 482–488.

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_4_482_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_4_482_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Generalizzazione di un teorema di Stokes
sul potenziale gravitazionale di una massa fluida
in equilibrio relativo e nuovo limite della velocità di rotazione.**

Nota di DEMORE QUILGHINI (a Firenze)

Sunto. - *Si dimostra che, esternamente alle masse, il potenziale gravitazionale di un sistema materiale fluido distribuito con densità generalmente continua e in equilibrio relativo è uguale al potenziale gravitazionale dovuto alla distribuzione omogenea della massa complessiva all'interno dello stesso campo. Si dà infine un nuovo limite per la velocità di rotazione.*

Summary. - *It is demonstrated here that, externally to masses, the Newtonian potential of a fluid material system distributed with a generally continuous density and in relative equilibrium is the same as the Newtonian potential of the total mass homogeneously distributed inside the same field. A new limit for the velocity of rotation is given.*

In una memoria in corso di pubblicazione negli Annali di Matematica Pura e Applicata ho studiato l'equilibrio di una massa fluida S soggetta alla propria gravitazione ed alla forza centrifuga dovuta ad un moto di rotazione stazionario rigido intorno ad un asse.

In questa occasione ho dato le condizioni alle quali necessariamente devono soddisfare la pressione p e la densità ρ se il sistema fluido S sta in una configurazione di equilibrio spontaneo.

Queste condizioni sono state date nell'ipotesi che per la velocità di rotazione ω si abbia:

$$(1) \qquad \omega^2 < \pi f \rho^*,$$

essendo f la costante gravitazionale e ρ^* la densità media del sistema.

Questa condizione, esplicitamente imposta nella citata memoria, può essere tolta in quanto, come dimostreremo in questa nota, la (1) è necessariamente verificata se il sistema S occupa un campo connesso.

Nel caso di sistemi materiali omogenei, $\rho = \rho^*$ ovunque, la (1) è stata dimostrata da U. CRUDELI [1](*). Più generalmente il CRUDELI [2] ha dimostrato che, per i sistemi materiali fluidi distribuiti con densità generalmente continua e in equilibrio relativo, sussiste per ω la limitazione:

$$(2) \quad \omega^2 < \pi f \rho_{max},$$

essendo ρ_{max} la densità massima del sistema.

Ovviamente quest'ultima limitazione si riduce alla (1) per i sistemi omogenei. Nel caso generale invece la (1) costituisce un notevole miglioramento della (2).

Per dimostrare la (1) dimostro da prima un teorema sul potenziale gravitazionale di una massa fluida in equilibrio relativo, teorema che permette di ricavare anche un classico risultato di STOKES.

Questo teorema di STOKES ([3] e [4]) assicura che, esternamente alle masse, il potenziale specifico gravitazionale di un sistema fluido S_1 in rotazione intorno ad un asse, con velocità ω , e in equilibrio relativo allo interno della superficie Σ che lo limita, è uguale al potenziale specifico gravitazionale dovuto ad una diversa distribuzione della massa allo interno della superficie Σ , purchè anche il nuovo sistema fluido S_2 , così costruito, sia in equilibrio relativo in rotazione intorno allo stesso asse e con la stessa velocità di S_1 .

Il teorema che qui dimostreremo assicura che, esternamente alle masse, il potenziale specifico gravitazionale di un sistema fluido S in equilibrio relativo è uguale al potenziale dovuto alla distribuzione omogenea della stessa massa all'interno dello stesso campo, sempre supposto in rotazione intorno allo stesso asse e con la stessa velocità di rotazione, senza supporre a priori, e nemmeno questa ipotesi potrebbe farsi, che anche il sistema omogeneo sia in equilibrio relativo.

Perciò il teorema di STOKES rientra completamente in questo, infatti i potenziali specifici gravitazionali di due sistemi S_1 ed S_2 ,

(*) I numeri in neretto ed in parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia posta al termine della nota.

ottenuti con due diverse distribuzioni della stessa massa all'interno dello stesso campo, che ruotano con la stessa velocità angolare e che sono, ambedue, in equilibrio relativo all'interno della superficie Σ che limita il campo, sono, esternamente a Σ , necessariamente uguali in quanto sono uguali al potenziale dovuto alla distribuzione omogenea della stessa massa.

Dimostriamo quindi il teorema:

Esternamente alle masse il potenziale specifico gravitazionale di un sistema materiale fluido S , che occupa un campo connesso, in rotazione stazionaria rigida intorno ad un asse e in equilibrio relativo è uguale al potenziale specifico gravitazionale dovuto alla distribuzione omogenea della stessa massa all'interno dello stesso campo occupato dal sistema S .

Per fissare le ipotesi assumiamo come sistema di riferimento una terna trirettangola $T(x, y, z)$ che ha l'asse z coincidente con l'asse di rotazione di S e che ruota, intorno a quest'asse, nello stesso verso e con la stessa velocità ω di S .

In questo riferimento per il potenziale specifico della gravità $V(P)$ del sistema S avremo:

$$(3) \quad V(P) = U(P) + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2),$$

essendo $U(P)$ il potenziale specifico gravitazionale e $\frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2)$, il potenziale delle forze specifiche centrifughe.

Dalla (3) segue immediatamente:

$$(4) \quad \Delta_z V(P) = -4\pi f \rho(P) + 2\omega^2.$$

Ora, per le ipotesi fatte, la superficie Σ che limita le masse è una superficie di livello per $V(P)$, cioè su Σ si ha $V(P) = \text{costante}$.

Ciò premesso si consideri la funzione $V^*(P)$ così definita:

a) nei punti P esterni alla superficie Σ sia:

$$(5) \quad V^*(P) = V(P),$$

b) nei punti interni al campo limitato dalla superficie Σ $V^*(P)$ sia soluzione dell'equazione:

$$(6) \quad \Delta_z V^*(P) = -4\pi f \rho^* + 2\omega^2,$$

essendo ρ^* la densità media di S , e soddisfi le condizioni al contorno:

$$(7) \quad V^*(P) = V(P) = \text{cost} \quad \text{nei punti } F \text{ di } \Sigma.$$

La funzione $V^*(P)$ così definita esiste ed è unica, continua ovunque anche attraverso Σ , ed è derivabile nella regione interna a Σ e in quella esterna con derivate prime ivi continue.

Queste proprietà di $V^*(P)$ per i punti della regione esterna a Σ seguono immediatamente dalla (5) e dalle stesse proprietà per $V(P)$.

Per i punti della regione interna queste proprietà per $V^*(P)$ seguono dal fatto che $V^*(P)$ è soluzione della ben nota equazione $\Delta_2 V^*(P) = \text{costante}$, con la condizione di essere costante sul contorno Σ che è una superficie chiusa e regolare in ogni suo punto.

Infine la continuità di $V^*(P)$ attraverso Σ segue subito dal confronto della (5) con la (7).

Dimostriamo adesso che $\text{grad } V^*(P)$, oltre ad essere continuo, come abbiamo notato, nella regione interna e in quella esterna a Σ , è continuo anche attraverso Σ .

Per questo, poichè quando P tende ad un punto P_0 di Σ provenendo dall'esterno, dalla (5) si ha:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \text{grad } V^*(P) = \lim_{P \rightarrow P_0} \text{grad } V(P),$$

tenuto conto della continuità di $\text{grad } V(P)$ attraverso Σ , basta dimostrare che anche quando P tende ad un punto P_0 di Σ provenendo dall'interno si ha:

$$(8) \quad \lim_{P \rightarrow P_0} \text{grad } V^*(P) = \lim_{P \rightarrow P_0} \text{grad } V(P).$$

A questo scopo osserviamo che la superficie Σ è superficie di livello per la funzione $V^*(P) - V(P)$, quindi, poichè il campo limitato da Σ , è connesso e la funzione $V^*(P) - V(P)$ è continua, ogni superficie di livello per $V^*(P) - V(P)$ che ha dei punti interni a Σ è necessariamente chiusa e tutta interna a Σ . Inoltre ogni superficie $V^*(P) - V(P) = \text{costante}$ interna a Σ è necessariamente regolare per la continuità, internamente a Σ , di $\text{grad } \{V^*(P) - V(P)\}$. Infine, poichè la superficie Σ è superficie di livello del sistema S e $\Delta_2 \{V^*(P) - V(P)\} = -4\pi f \{ \rho^* - \rho(P) \}$, essendo ρ^* costante, è distribuito con la stessa simmetria con cui

è distribuita la densità $\rho(P)$ del sistema S , e quindi con la stessa simmetria con cui è distribuito $\Delta_z V(P) = -4\pi f\rho(P) + 2\omega^2$, sono soddisfatte, per la funzione $V^*(P) - V(P)$, le stesse condizioni per cui vale il teorema di L. LICHTENSTEIN [5] per la funzione $V(P)$, salva soltanto la costanza del segno del parametro differenziale secondo. Quindi la funzione $V^*(P) - V(P)$ gode delle stesse proprietà di cui gode per il teorema di L. LICHTENSTEIN, la funzione $V(P)$, salvo al più la proprietà di essere sempre crescente procedendo verso l'interno del campo occupato dal sistema. Perciò (cfr. il § 3 della citata memoria) le superfici $V^*(P) - V(P) = \text{costante}$ stratificano completamente il campo occupato dal sistema S . Esprimiamo perciò questa famiglia di superfici interne a Σ , la superficie Σ compresa, nella forma:

$$\mu = \mu(x, y, z),$$

essendo μ un opportuno parametro. Simbolicamente indicheremo con Σ_μ una superficie di questa famiglia e con C_μ il campo ad essa interno.

Una volta determinate tutte le superfici Σ_μ possiamo assumere come parametro μ il volume del campo C_μ .

Adesso la funzione $V^*(P) - V(P)$ si può considerare funzione del punto P tramite il parametro μ che caratterizza la superficie Σ_μ che passa per P , di modo che avremo: $V^*(P) - V(P) = F[\mu(P)]$, ed anche, internamente a Σ :

$$(9) \quad \text{grad} \{ V^*(P) - V(P) \} = \left\{ \frac{d[V^* - V]}{d\mu} \right\}_{\mu=\mu(P)} \text{grad } \mu(P).$$

Ora, indicato con $\mathbf{n}(P)$ il versore normale interno a Σ_μ in P , per il teorema di GREEN-OSTROGRAWSKY, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_\mu(P)} \mathbf{n}(P') \times \text{grad} \{ V^*(P') - V(P') \} d\Sigma_{\mu(P)}(P') = \\ = \int_{C_\mu(P)} \Delta_z \{ V^*(P') - V(P') \} dC_{\mu(P)}(P') = 4\pi f \int_{C_\mu(P)} [\rho^* - \rho(P')] dC_{\mu(P)}(P') \end{aligned}$$

ed anche, tenuto conto che $\left\{ \frac{d[V^* - V]}{d\mu} \right\}_{\mu=\mu(P)}$ è costante su $\Sigma_{\mu(P)}$,

dalla (9) segue:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d[V^* - V]}{d\mu} \right]_{\mu=\mu(P)} \int_{\Sigma_{\mu(P)}} \mathbf{n}(P') \times \text{grad } \mu(P') d\Sigma_{\mu(P)}(P') = \\ = 4\pi f \int_{C_{\mu(P)}} [\rho^* - \rho(P')] dC_{\mu(P)}(P'). \end{aligned}$$

Da quest'ultima, poichè quando il punto P tende ad un punto P_0 di Σ proveniendo dall'interno la superficie $\Sigma_{\mu(P)}$ tende a diventare la superficie Σ e il campo $C_{\mu(P)}$ tende a diventare il campo occupato da S , tenuto conto che ρ^* è la densità media del sistema S , segue:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \left[\frac{d[V^* - V]}{d\mu} \right]_{\mu=\mu(P)} \int_{\Sigma_{\mu(P)}} \mathbf{n}(P') \times \text{grad } \mu(P') d\Sigma_{\mu(P)}(P') = 0.$$

Adesso sono possibili due casi, o

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \int_{\Sigma_{\mu(P)}} \mathbf{n}(P') \times \text{grad } \mu(P') d\Sigma_{\mu(P)}(P') = 0,$$

ed allora per il significato geometrico di μ necessariamente $\text{grad } \mu$ è nullo in tutti i punti di Σ e quindi dalla (9) segue la (8), oppure:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \int_{\Sigma_{\mu(P)}} \mathbf{n}(P') \times \text{grad } \mu(P') d\Sigma_{\mu(P)}(P') \neq 0$$

ed allora si ha: $\lim_{P \rightarrow P_0} \left[\frac{d[V^* - V]}{d\mu} \right]_{\mu=\mu(P)} = 0$ e quindi, ancora dalla (9) segue la (8), e resta perciò dimostrata, in questo modo, la continuità di $\text{grad } V^*(P)$ attraverso la superficie Σ .

Consideriamo adesso la funzione:

$$U^*(P) = V^*(P) - \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2).$$

Dalla definizione di $V^*(P)$ e dalle proprietà per essa dimostrate segue che $U^*(P)$ è il potenziale gravitazionale dovuto alla distribuzione omogenea della massa complessiva del sistema S all'interno della superficie Σ e quindi dalla (5) e dalla (3) segue il teorema. C. V. D.

Come conseguenza di questo teorema, ripetendo la dimostrazione data da U. CRUDELI per provare la limitazione di ω nel caso dei sistemi fluidi omogenei segue immediatamente:

La velocità di rotazione di un sistema materiale fluido distribuito in un campo connesso e in equilibrio relativo per effetto della propria gravitazione e delle forze centrifughe dovute ad un moto di rotazione stazionario rigido intorno ad un asse soddisfa la limitazione

$$\omega^2 < \pi f \rho^*$$

essendo ρ^* la densità media del sistema.

Resta quindi, in questo modo, provata la (1).

BIBLIOGRAFIA

- [1] U. CRUDELI, *Nuovo limite superiore delle velocità angolari dei fluidi omogenei, rotanti uniformemente limitati da figura di equilibrio*, « Atti Acc. dei Lincei », Anno CCCVII, Serie V, Vol. XIX, 1° semestre pgg. 666-668, (Roma 1910)
- [2] U. CRUDELI, *Sulle velocità angolari degli astri rotanti nella teoria dell'equilibrio relativo*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo, Tomo LVII, pgg. 308-310, (Palermo 1933).
- [3] R. WAVRE, *Figures planétaires et géodésie*, « Cahiers Scientifiques », Vol XII, cap.lo II, p. 40, (Paris 1932)
- [4] H. POINCARÉ, *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, Cap.lo V, p. 97, (Paris 1903).
- [5] L. LICHTENSTEIN, *Gleichgewichtsfiguren rotierender flüssigkeiten*, Cap.lo II, p. 10. (Berlin 1933).