Bollettino
Unione Matematica Italiana

Paul Vincensini

Sur une représentation des cercles et des sphères de l'espace ordinaire sur l'espace euclidien à quatre dimensions.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.3, p. 338–344.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_3_338_0>

Sur une représentation des cercles et des sphères de l'espace ordinaire sur l'espace euclidien à quatre dimensions.

Nota di PAUL VINCENSINI (a Marseille).

Sunto. - *Si definisce la rappresentaziane di cui qui sopra, e se ne indicano le proprietà essenziali, le cui applicazioni saranno oggetto di un lavoro successivo.*

Résumé. - *On définit la répresentation en question, et on en indique les propriétes essentielles, dont les applications seront l'objet d'un autre travail.*

1. Introduction.

A l'occasion d'une conférence sur l'oeuvre géomètrique de L. BIANCHI [1], et plus particulièrement de l'exposition de la partie de cette oeuvre relative aux surfaces isothermiques, j'ai été conduit à revenir sur certains résultats relatifs à la théorie de ces surfaces, que j'avais exposés il y a déja quelque temps, sans les publier, à un petit groupe d'auditeurs, comme application d'une transformation particulière de l'espace des sphères et des cercles de E_3 dans l'espace euclidien E_4. C'est de cette transformation qu'il va être question dans la courte note qui va suivre, qui contient l'exposition de la transformation et de ses principales propriétés, les applications devant paraitre prochainement dans un Mémoire plus étendu du *Journal de Mathématiques pures et appliquées.*

Il est bien connu que les coordonnées pentasphèriques fournissent, moyennant l'introduction d'une certaine polarité, une représentation biunivoque de l'espace sphérique ordinaire (E_3) à trois dimensions (dans lequel l'élément générateur est la sphère) sur l'espace projectif ponctuel (E_4) à quatre dimensions. Dans le travail actuel le rôle de l'espace projectif à quatre dimensions est joué

---

[1] P. VINCENSINI, *Vue d'ensemble sur l'œuvre géométrique de Luigi Bianchi,* « Rend. Semin. Matem. Univ. Torino », (vol. 16, 1956-57) pp. 115-157.

par l'espace métrique euclidien ordinaire au même nombre de dimensions. Cette substitution de l'espace métrique à l'espace projectif permet de présenter sous une forme aussi simple et aussi suggestive que possible certains liens existant entre les sphères ou les cercles de l'espace à trois dimensions et leurs images dans l'espace métrique euclidien à quatre dimensions, et fournit un instrument de recherche particulièrement approprié à l'étude de certaines questions, relatives notament aux familles de cercles ou de sphères de E_3, sujet qui a fait l'objet de nombreuses et profondes recherches de C. GUICHARD, malheureusement assez difficiles à lire (²).

2. Représentation des sphères de E_3 - Proprietés - La corrélation $\mathcal{C}$.

Nous supposerons l'espace euclidien ordinaire E_3 à trois dimensions plongé dans l'espace métrique E_4. Plus précisément, E_3 sera l'hyperplan $x_4 = 0$ de l'espace E_4 rapporté au $4^{\text{èdre}}$ orthogonal $Ox_1\, x_2\, x_3\, x_4$. La transformation que nous allons définir est déterminée par la donnée d'un point fixe F de E_4, que nous pouvons supposer situé sur Ox_4 à la distance $\overline{OF} = p$ de E_3, et elle fait correspondre à toute sphère Σ (de centre ω et de rayon R) de E_3, le centre I de l'hypersphère (³) de E_4 déterminée par Σ et F.

Le point I sera dit l'image de Σ dans E_4, il est sur la perpendiculaire en ω à E_3 et l'on a

$$\overline{\omega I}^2 + R^2 = \overline{IF}^2. \tag{1}$$

Réciproquement tout point I de E_4 est l'image d'une sphère Σ (réelle ou imaginaire de E_3, de sorte que la transformation envisagée établit une correspondance biunivoque entre les sphères de E_3 et leurs points images dans E_4. Les sphères de rayon nul de E_3 ont pour images les points de E_4 situés sur l'hyperparaboloïde de révolution ($\mathcal{S}$) de E_4 admettant F pour foyer et E_3 pour hyper-

(²) C. GUICHARD, *Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques*, « Ann. Ec. Norm. », (3), XX, p.p. 75-288.

(³) Les variétés sphériques à 3, 2 et 1 dimension de E_4 seront respectivement appeleés hypersphères, sphères et cercles.

plan directeur, d'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2px + p^2 = 0. \tag{2}$$

On constate aussitôt que si la normale en ω (centre de Σ) à l'hyperplan E_3 perce $(\mathcal{S})$ au point J, on a:

$$\overline{IJ} = \frac{R^2}{2p}, \tag{3}$$

de sorte que les images des sphères de E_3 ayant un rayon donné R sont situées sur l'hyperparaboloïde déduit de $(\mathcal{S})$ par la translation $\left(-\frac{R^2}{2p}\right)$ parallèle à l'axe de $(\mathcal{S})$.

(3) montre que deux sphères concentriques de E_3 sont orthogonales si leurs images I et I' sont symétriques par rapport au point J où la droite $I\,I'$ coupe $(\mathcal{S})$ [car on a alors $R^2 + R'^2 = 2p(\overline{IJ} + \overline{I'J}) = 0$]. Il revient au même de dire que les points I et I' sont conjugués harmoniques par rapport aux points d'intersection de la droite $I\,I'$ avec $\mathcal{S}$ (qui sont J et le point à l'infini de l'axe de $\mathcal{S}$).

On peut d'ailleurs vérifier, au moyen de (1), que l'angle de deux sphères de E_3 est déterminé (à un facteur constant près) par le logarithme du birapport des points images des deux sphères et des points où la droite qui les joint coupe $\mathcal{S}$, et de là résulte que les conditions pour que deux sphères soient orthogonales ou tangentes sont que leurs images soient conjuguées par rapport à $\mathcal{S}$, ou bien situées sur une tangente à $\mathcal{S}$. Le lieu des images des ∞^3 sphères tangentes à une sphère fixe donnée Σ de E_3 est donc l'hypercône quadratique de sommet I (image de Σ) circonscrit à $\mathcal{S}$, et le lieu des images des sphères orthogonales à Σ est l'hyperplan polaire de I par rapport à $\mathcal{S}$. Ce dernier hyperplan coupe $\mathcal{S}$ suivant une quadrique, lieu des images des sphères de rayon nul orthogonales à Σ, et dont la projection orthogonale sur E_3 est par suite la sphère Σ elle-même.

Un plan (π) de E_3, regardé comme une sphère de rayon infini, a pour image le centre de l'hypersphère de E_4 déterminée par F et par π; cette hypershère se réduit à l'hyperplan (F, π), et son centre est le point de l'hyperplan à l'infini H_∞ de E_4 situé dans la direction normale à l'hyperplan (F, π). Les images des plans (π) passant par un point donné A de E_3 sont d'ailleurs situées dans le plan de H_∞, trace sur H_∞ de la direction hyperplane perpendiculaire à la droite $F\,A$.

En faisant correspondre aux plans et points de E_3 les points et les plans images qui viennent d'être définis, on obtient entre E_3 et H_∞, une corrélation que dans la suite nous désignerons par $\mathcal{T}$, et au sujet de laquelle nous indiquerons les propriétés suivantes:

Deux plans perpendiculaires de E_3 ont pour images (pour transformés dans $\mathcal{T}$) deux points de H_∞, qui, comme on l'a vu, sont conjugués par rapport à $\mathcal{S}$; ces points sont donc conjugués par rapport à l'intersetion de $\mathcal{S}$ par H_∞, qui est le cône de H_∞ formé par les génératrices de $\mathcal{S}$ issues du point de $\mathcal{S}$ à l'infini dans la direction de l'axe, cône qui est d'ailleurs circonscrit à la sphère de l'infini de E_3 et que nous désignerons par Γ.

Un plan isotrope de E_3 (perpendiculaire sur lui-même) a par suite pour image un point de Γ; de sorte que le cône Γ est le transformé dans $\mathcal{T}$ du cercle de l'infini de E_3, son sommet (point où $\mathcal{S}$ touche H_∞) correspondant au plan de l'infini de E_3. En outre si l'on considère la sphère (σ) section de E_3 par le cône isotrope de sommet F (sphère de centre O et de rayon ip), les plans π de E_3 tangents à cette sphère ont leurs images à l'infini dans les directions normales aux hyperplans tangents au cône isotrope (F, σ), c'est à dire sur la sphère de l'infini de E_4, de sorte que cette dernière sphère est la transformée de la sphère (σ) de E_3 dans la corrélation $\mathcal{T}$.

3. **Représentation des cercles de** E_3.

Considérons maintenant un faisceau (Φ) quelconque de sphères de E_3 admettant pour cercle de base un cercle donné C. C'est la trace, sur E_3, du faisceau (Ψ) d'hypersphères de E_4 admettant pour sphère de base la sphère (F, C). Le lieu des centres des hypershères de ce dernier (lieu des images des sphères du faisceau Φ envisagé dans E_3), est une droite D de E_4, qui correspond biunivoquement à C et que nous dirons *l'image de* C. D coupe $\mathcal{S}$ aux points images des sphères de rayon nul du faisceau Φ, et est tangente à $\mathcal{S}$ si le faisceau est un faisceau de sphère tangentes, ce qui est conforme au résultat du n. 2 suivant lequel les droites joignant les images de deux sphères tangentes quelconques de E_3 sont tangentes à $\mathcal{S}$.

Les images des ∞^3 cercles C portés par une même sphère Σ sont évidemment les ∞^3 droites de la gerbe de sommet I de E_4, gerbe qui se réduit à un faisceau de droites parallèles pour les systèmes de ∞^3 cercles coplanaires (la direction du faisceau étant celle du point à l'infini image du plan commun).

Une droite d quelconque de E_3, regardée comme un cercle de rayon infini a pour image la droite δ de l'hyperplan H_∞, à l'infini dans la direction plane perpendiculaire au plan (F, d), qui correspond à d dans la corrélation $\mathcal{C}$ précédemment définie. δ perce le cône Γ de H_∞ défini au n. 2 en deux points qui sont les images des deux plans isotropes de E_3 issus de d; si d est isotrope ces deux derniers plans sont confondus, et δ est tangente à Γ: *aux droites isotropes de E_3 correspondent donc, dans la corrélation $\mathcal{C}$, les droites de H_∞ tangentes au cône Γ.*

Les cercles orthogonaux à une sphère fixe Σ de centre ω et d'image I, qui peuvent être regardés comme les intersections de deux sphères orthogonales à Σ, ont pour droites images les droites de l'hyperplan polaire de I par rapport à $\mathcal{S}$, puisque ces droites images doivent contenir les points images des deux sphères définissant le cercle envisagé lesquels sont dans l'hyperplan polaire indiqué.

Si Σ se réduit à un point A, son image I est sur $\mathcal{S}$, et l'hyperplan lieu des images des cercles de E_3 passant par A se réduit à l'hyperplan tangent à $\mathcal{S}$ en I. Il résulte aussitôt de là que les images des cercles passant par deux points donnés A et B sont dans le plan intersection des hyperplans tangents à $\mathcal{S}$ aux points I et I' images de A et de B.

Si B tend vers A dans une direction donnée dans E_3, I' tend vers I dans une direction déterminée tangente á $\mathcal{S}$, et l'intersection précédente tend vers un plan tangent à $\mathcal{S}$ au point I de direction déterminée, de sorte que les images des cercles de E_3 tangents entre eux en un point donné sont les droites d'un plan tangent à $\mathcal{S}$ au point image de la sphère de rayon nul centrée au point donné.

Demandons-nous quels sont les cercles qui ont pour images les droites isotropes de E_4. L'image du plan d'un tel cercle (sphère de rayon infini du faisceau qu'il détermine) doit être située sur la sphère de l'infini de E_4; or on a vu que cette sphère est la transformée de la sphère (σ) de centre O et de rayon ip dans la corrélation $\mathcal{C}$ définie au n. 2; de là résulte que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un cercle ait une image isotrope est que son plan soit tangent à la sphère* (σ).

Au lieu de la sphère (σ), envisageons une sphère quelconque (Σ) de E_3. Un plan quelconque tangent à (Σ) a, comme l'on sait, son image à l'infini sur le cône circonscrit à $\mathcal{S}$ ayant pour sommet l'image I de (Σ). Un cercle dont le plan est tangent à (Σ) a donc pour image une droite dont le point à l'infini est sur la quadrique de l'infini (Q) intersection du cône précédent avec l'hyperplan de l'infini (H_∞). Cette quadrique (Q) est la transformée de (Σ) par $\mathcal{C}$, et comme les génératrices isotropes de (Σ) ont leurs transformées tangentes au cône Σ ainsi qu'on l'a vu plus haut, Q est inscrite dans ce cône. L'ensemble des quadriques inscrites dans Γ constitue une famille à 4 paramètres, *qui est la transformée par $\mathcal{C}$ de la famille (à 4 paramètres) des sphères de l'espace E_3.*

En particulier, les plans de E_3 passant par un point fixe A ont leurs images dans le plan de H_∞ correspondant à A dans la corrélation $\mathcal{C}$ (plan qui compté deux fois est bien une quadrique Q particulière), ce qui prouve que les cercles de E_3 dont les plans passent par un point fixe A ont pour images les droites de E_4 s'appuyant sur un même plan de H_∞ (le plan transformé de A par $\mathcal{C}$).

D'une façon plus générale d'ailleurs, les cercles de E_3 dont les plans sont tangents à une surface donnée quelconque S, ont pour images les droites de E_4 coupant H_∞ sur la surface S' que la corrélation $\mathcal{C}$ fait correspondre à S.

En ce qui concerne la figure constituée par un cercle quelconque C de E_3 et son image dans E_4 il y a lieu de faire les remarques suivantes. Les images des différentes sphères passant par C étant situées sur les normales à E_3 issues des centres de ces sphères, le lieu de ces images, c'est à dire la droite image de C, se projette orthogonalement sur E_3 suivant le lieu des centres des sphères précédentes, qui n'est autre chose que l'axe de C. AINSI:

L'image d'un cercle quelconque de E_3 se projette orthogonalement su · E_3 suivant l'axe du cercle.

A côté de la droite image d'un cercle C, envisageons son plan polaire (π) par rapport à $\mathcal{S}$. Les points de ce plan polaire sont (n. 2) les images des sphères de E_3 orthogonales aux sphères du faisceau admettant C pour cercle de base, c'est à dire des sphères *orthogonales à* C. Parmi ces dernières, celles qui sont réduites aux points de C ont leurs images sur la conique intersection de (π) et de $\mathcal{S}$, et comme les images en question sont situées sur les normales à E_3 issues des différents points de C, on voit que:

La conique suivant laquelle le plan polaire de l'image d'un cercle quelconque de E_3 *coupe $\mathcal{S}$ se projette orthogonalement sur* E_3 *suivant le cercle* C *lui-même.*

L'axe d'un cercle C se confond avec son image si l'image I de toute sphère passant par C est dans E_3; la relation (1) du n. 2 (où $\overline{\omega I} = 0$) montre que pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que l'on ait $\overline{IF}^2 = R^2$, c'est à dire que les différentes sphères de E_3 passant par C soient orthogonales à la sphère (σ) de centre O et de rayon ip), et que par suite le cercle C *soit orthogonal à la sphère* (σ).

Au lieu de la sphère σ envisageons, d'une façon tout à fait générale, une surface quelconque S de E_3, et cherchons à caractériser, par leurs images, les cercles de E_3 orthogonaux à S. A étant un point quelconque de S, soient S' la surface de $\mathcal{G}$ qui se projette orthogonalement sur E_3 suivant S, A' le point de S' qui se projette en A, et C un cercle quelconque de E_3 orthogonal à S en A. C passant par A, son image est, comme on l'a vu, située dans l'hyperplan tangent à $\mathcal{G}$ en A'. D'autre part si l'on envisage une sphère quelconque Σ tangente en A à S, C, qui est orthogonal à cette sphère, aura (n. 2) son image dans l'hyperplan polaire de l'image I de Σ par rapport à $\mathcal{G}$. De là résulte que l'image de C est dans le plan tangent en A' à la quadrique Q de $\mathcal{G}$ se projetant sur E_3 suivant la sphère Σ, toute droite de ce plan étant d'ailleurs l'image d'un cercle C orthogonal en A à S. Or, Σ et S étant tangentes en A, les surfaces Q et S' de $\mathcal{G}$ qui se projettent suivant Σ et S sont tangentes en A', et l'on peut dire que l'image d'un cercle quelconque normal à S en A est dans le plan tangent en A' à S', ce qui nous permet d'énoncer le résultat suivant:

Les images des cercles orthogonaux à une surface quelconque S *de* E_3 *sont les droites des plans tangents à la surface S' de l'hyperparaboloïde $\mathcal{G}$ qui se projette orthogonalement sur* E_3 *suivant la surface* S *elle-même.*