BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LUCIANO DABONI

Una proprietà delle distribuzioni poissoniane.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 14
(1959), n.3, p. 318–320.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_3_318_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Una proprietà delle distribuzioni poissoniane

Nota di LUCIANO DABONI (a Trieste)

Sunto. - *In uno schema bernoulliano sia N il numero aleatorio delle prove. Il numero N_A dei successi e quello $N_B = N - N_A$ degli insuccessi riescono stocasticamente indipendenti allora e allora soltanto che N è distribuito poissonianamente.*

Summary. - *In a Bernoulli scheme let be N the random number of trials. The number N_A of successes and the $N_B = N - N_A$ of failures are independent if and only if N has a Poisson distribution.*

Nel numero di aprile 1959 del giornale «The American Mathematical Monthly» (Vol. 66, n. 4, pag. 317) JOHN LAMPERTI del California Institute of Technology propone di dimostrare un teorema che caratterizza il ruolo delle distribuzioni poissoniane relativamente ad uno schema bernoulliano con un numero aleatorio di prove. Con una modifica che riguarda solamente il linguaggio dell'enunciato originale ⁽¹⁾, il problema proposto è il seguente:

Immaginiamo di seguire una partita a testa e croce in cui il numero N dei colpi è aleatorio. In ogni giocata sia costante ed eguale a p ($0 < p < 1$) la probabilità che appaia testa e $q = 1 - p$ quella che appaia croce; le prove sieno ritenute indipendenti.

Sieno N_A il numero delle teste ottenute in N colpi e $N_B = N - N_A$ quello delle croci. Si tratta di provare che N_A e N_B sono variabili aleatorie stocasticamente indipendenti allora e allora soltanto che la distribuzione di N è poissoniana.

Nelle righe che seguono espongo una dimostrazione basata sul fatto che le funzioni generatrici delle distribuzioni di Poisson sono le sole soluzioni di un'equazione funzionale che stabilirò per la

(1) che dice: Let N be a random variable whose values are nonnegative integers. Independently of each other, each of N balls is placed either in urn A with probability p ($0 < p < 1$) or in urn B with probability $1 - p$, resulting in N_A balls in urn A and $N_B = N - N_A$ in urn B . Show that the random variables N_A and N_B are independent if and only if N has a POISSON distribution.

funzione generatrice di N a partire dalla condizione di indipendenza stocastica per N_A e N_B .

$$\text{Sieno} \quad A(s) = \sum_0^{\infty} a_h s^h, \quad B(s) = \sum_0^{\infty} b_h s^h, \quad C(s) = \sum_0^{\infty} c_h s^h$$

le funzioni generatrici di N_A , N_B , $N = N_A + N_B$ di modo che $a_h = \text{Prob.} \{N_A = h\}$ e analoghi sono i significati di b_h , c_h .

Ora è

$$(1) \quad a_h = \sum_0^{\infty} \binom{h+i}{h} p^h q^i c_{h+i}$$

e analogamente

$$(2) \quad b_k = \sum_0^{\infty} \binom{k+j}{k} q^k p^j c_{k+j}$$

(la verifica che $\sum_0^{\infty} a_h = \sum_0^{\infty} b_k = 1$ è immediata).

Condizione necessaria e sufficiente perchè N_A e N_B siano stocasticamente indipendenti è che:

$$\text{Prob.} \{N_A = h \cap N_B = k\} = \text{Prob.} \{N_A = h\} \cdot \text{Prob.} \{N_B = k\}.$$

D'altra parte è:

$$\begin{aligned} \text{Prob.} \{N_A = h \cap N_B = k\} &= \text{Prob.} \{N_A = h \cap N_B = k \mid N = h+k\} \cdot \\ &\cdot \text{Prob.} \{N = h+k\} \end{aligned}$$

e la condizione di indipendenza dice quindi che:

$$\binom{h+k}{h} p^h q^k c_{h+k} = a_h \cdot b_k$$

sicchè, tenendo conto delle (1), (2) rimangono stabilite le:

$$\binom{h+k}{h} c_{h+k} = \sum_0^{\infty} \binom{h+i}{h} q^i c_{h+i} \cdot \sum_0^{\infty} \binom{k+j}{k} p^j c_{k+j} \quad (h, k=0, 1, 2 \dots).$$

Sieno ora u e v due numeri reali positivi e tali che $p+v < 1$, $q+u < 1$.

Eseguendo la sommatoria doppia rispetto h e k sulla

$$\frac{(h+k)!}{h!k!} c_{h+k} u^h v^k = \sum_0^\infty \frac{(h+i)!}{i!} q^i c_{h+i} \frac{u^h}{h!} \cdot \sum_0^\infty \frac{(k+j)!}{j!} p^j c_{k+j} \cdot \frac{v^k}{k!}$$

si trova che:

$$\begin{aligned} \sum_0^\infty \left(\sum_0^\infty \frac{(h+k)!}{h!} c_{h+k} u^h \right) \frac{v^k}{k!} &= \sum_0^\infty \left(\sum_0^\infty \frac{(h+i)!}{i!} c_{h+i} q^i \right) \frac{u^h}{h!} \cdot \\ &\cdot \sum_0^\infty \left(\sum_0^\infty \frac{(k+j)!}{j!} c_{k+j} p^j \right) \frac{v^k}{k!} \end{aligned}$$

e le quantità nelle parentesi sono, nell'ordine, le derivate $C^{(h)}(u)$, $C^{(h)}(q)$, $C^{(h)}(p)$ della funzione generatrice $C(s)$ di N nei punti indicati u , q , p .

A primo membro figura pertanto lo sviluppo di TAYLOR della $C(s)$ di punto iniziale u ed incremento v , a secondo membro il prodotto degli sviluppi di TAYLOR della $C(s)$ di punti iniziali q , p e incrementi rispettivamente u e v .

I punti $u+v$, $q+u$, $p+v$ riescono interni all'intervallo $0,1$ ove la $C(s)$ è la somma della sua serie di TAYLOR (il raggio di convergenza della serie $\sum_0^\infty c_n s^n$ è ≥ 1).

Risulta in definitiva, per tali valori di u , v , p , $q=1-p$:

$$C(u+v) = C(u+q) \cdot C(v+p)$$

e si riconosce facilmente che le sole funzioni generatrici soluzioni di tale equazione funzionale sono le

$$C(s) = e^{\lambda(s-1)} \quad (\lambda \text{ arbitrario})$$

cioè le funzioni generatrici delle distribuzioni di POISSON e rimane stabilito in tal modo il teorema proposto.

Ricordando il risultato dimostrato dal RAIKOW secondo il quale gli addendi di una distribuzione poissoniana sono tali se indipendenti (analogo al teorema di CRAMER per la distribuzione normale), si ricava che le variabili N_A e N_B sono distribuite anch'esse secondo una legge di POISSON ed è del resto immediato verificare sulle (1), (2) che, tenendo conto della $c_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$, riesce

$$a_n = \frac{(\lambda p)^n}{n!} e^{-\lambda p}, \quad b_n = \frac{(\lambda q)^n}{n!} e^{-\lambda q}.$$