Bollettino
Unione Matematica Italiana

Dionisio Gallarati

Sulle irregolarità di un S_r doppio.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.2, p. 175–181.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_2_175_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1959.

Sulle irregolarità di un S_r doppio.

Nota di Dionisio Gallarati (a Genova)

Sunto. - *Le irregolarità di un* S_r *doppio (superficialmente irregolare) la cui varietà di diramazione consista di* 2μ ($\mu \geq 2$) *ipersuperficie di un fascio generale soddisfano le relazioni:*

$$q_2 = \mu - 1, \qquad q_k + q_{k+1} = 0 \qquad (k = 2, 3, \dots, r-1).$$

Summary. - *The irregularities of a double space* S_r *(superficially irregular) whose branch variety consists of* 2μ ($\mu \geq 2$) *hypersurfaces of a general pencil, satisfy the relations:*

$$q_2 = \mu - 1, \qquad q_k + q_{k+1} = 0 \qquad (k = 2, 3, \dots, r-1).$$

1. In questa Nota estendo agli spazi doppi di dimensione qualsiasi alcuni miei risultati relativi agli S_3 doppi irregolari (1); risultati che, sebbene assai semplici, sembrano degni di nota anche per il fatto che assai scarse sono state le ricerche intorno a tipi speciali di varietà irregolari.

È noto che la curva di diramazione di un piano doppio irregolare si spezza in curve di un fascio; e se 2μ ($\mu \geq 2$) è il numero di queste curve, l'irregolarità del piano doppio è $\mu - 1$ (2).

Consideriamo allora un S_r doppio avente irregolarità superficiale $q_2 > 0$. Poichè l'irregolarità h-dimensionale di una V_r è uguale alla irregolarità h-dimensionale della V_h che si ottiene intersecando $r-h$ generiche ipersuperficie distinte non singolari estratte da $r-h$ sistemi lineari ampi (eventualmente coincidenti del tutto od in parte) (3), l'ipotesi $q_2 > 0$ implica che la varietà di diramazione Δ dell'S_r doppio sia spezzata in 2μ ipersuperficie di un fascio $|F|$, ove $\mu = 1 + q_2$.

(1) D. Gallarati, *Alcune osservazioni sulle irregolarità di un S_3 doppio* « Rend. Lincei » (8) 24, pp. 139-142 (1958).

(2) M. De Franchis, *I piani doppi dotati di due o più differenziali totali di prima specie*, « Rend. Lincei », (5) 13, pp. 688-695 (1904); *Sulle superficie algebriche le quali contengono un fascio irrazionale di curve*, « Rend. Palermo », t. XX, pp. 49-54 (1905).

(3) cfr. ad. es. E. Marchionna, *Il teorema di Riemman-Roch sulle varietà algebriche e questioni collegate con la teoria delle irregolarità*, Appendice VI al volume di F. Severi: *Geometria dei sistemi algebrici sopra una superficie e sopra una varietà algebrica* vol. III, Ed. Cremonese (Roma, 1959) pp. 395-437.

Qui, limitandomi al caso più semplice, quello in cui il fascio $|F|$ sia generale, dotato cioè di varietà base $\mathcal{C}$, di dimensione $r-2$, irriducibile e non singolare (sebbene i risultati che ottengo possano ritenersi validi anche in ipotesi meno restrittive, come già ho osservato per $r=3$), dimostro che *le irregolarità* $q_2, q_3, \ldots, q_r$ *dell'* S_r *doppio sono legate dalle relazioni:*

$$g_k = q_k + q_{k+1} = 0 \qquad (k = 2, 3, \ldots, r-1),$$

sicchè l' S_r *doppio non possiede forme differenziali di prima specie delle dimensioni* 2, 3, ..., r − 1 (4) (mentre notoriamente possiede $q_2 = \mu - 1$ differenziali picardiani di prima specie e P_g integrali r-pli di prima specie).

Se ora si tien conto che se T è una ipersuperficie qualunque di V_r, la deficienza del sistema staccato sopra T dal suo sistema aggiunto non supera la somma delle due ultime irregolarità (3), si ha che *il sistema aggiunto ad una qualsiasi ipersuperficie* T *dell'* S_r *doppio sega su* T *il sistema canonico completo.*

Inoltre, se T appartiene ad un sistema lineare ampio $|T|$ e se X denota un'ipersuperficie canonica (impura) di V_r, la deficienza del sistema lineare segato dal sistema $|X + iT|$ sulla varietà caratteristica T^i (intersezione di i ipersuperficie del sistema $|T|$) eguaglia il numero dei differenziali $(r-i)$-pli di prima specie (5); e quindi *se una ipersuperficie* T *dell'* S_r *doppio appartiene ad un sistema lineare ampio, il sistema* $|X + iT|$ *sega su* T^i *il sistema canonico completo* (6).

Si vede subito che ogni S_r doppio irregolare possiede un fascio irrazionale di ipersuperficie; infatti alla generica ipersuperficie F del fascio $|F|$ a cui appartiene Δ corrispondono *due* ipersuperficie appartenenti ad un fascio iperellittico $|\Phi|$, il cui genere π si valuta notando che quelle due ipersuperficie coincidono se, e soltanto se, la F corrispondente fa parte di Δ. La g_2^1 del fascio $|\Phi|$

(4) K. Kodaira, *Some results in the transcendental theory of algebraic varieties*, « Annals of Math. », 59, pp. 86-134 (1954); F. Severi, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche: Terza Memoria*, « Annali di Matematica » (4) 41, pp. 161-199 (1956); *Contributi alla teoria delle irregolarità d'una varietà algebrica*, « Rend. Lincei » (8) 20, pp. 7-16 (1956).

(5) W. V. D. Hodge, *A note on the Riemann-Roch theorem*, « Journal London Math. Soc. », 30 (1955).

(6) cfr. E. Marchionna, *Sul teorema di Riemann-Roch relativo alle varietà algebriche*, « Rend. Lincei » (8) 24, pp. 396-403; 500-504; 672-679 (1958).

ha quindi 2μ elementi doppi; e perciò $\pi = \mu - 1 = q_2$. Quando $\mu \geq 3$ l'esistenza del fascio irrazionale di ipersuperficie si deduce anche dal fatto che due qualunque forme differenziali lineari di prima specie dell' S_r doppio sono razionalmente dipendenti; perchè in caso contrario il loro prodotto esterno fornirebbe una forma differenziale quadratica di prima specie non nulla identicamente.

Il metodo ch'io seguo è lo stesso già impiegato nel caso $r = 3$; ma mentre nel caso $r = 3$ ho potuto giovarmi delle formole di postulazione per una curva i-pla assegnate da M. NOETHER (7), nel caso attuale occorre calcolare preliminarmente la postulazione di una V_{r-2} i-pla rispetto alle V_{r-1} di dato ordine di S_r, nell'ipotesi che V_{r-2} sia la completa intersezione di due ipersuperficie. Si raggiunge lo scopo imitando il procedimento indicato da M. NOETHER (per $r = 3$), e già efficacemente utilizzato da L. ROTH (8) nel caso $r = 4$.

2. Siano A, B due ipersuperficie di S_r, aventi ordini a, b $(a \geq b)$, le quali si seghino in una varietà $\mathcal{C}$ (di dimensione $r - 2$ ed ordine ab) non singolare. Se $\varphi = 0$, $\psi = 0$ sono le equazioni di A, B, ove φ e ψ denotano forme di gradi a, b nelle variabili $x_0, x_1, \ldots, x_r$, l'equazione di una generica ipersuperficie d'ordine n sufficientemente elevato $(n \geq ia)$ che passi con la moltiplicità i per $\mathcal{C}$ si può scrivere nella forma:

$$V^n \equiv L_0\varphi^i + L_1\varphi^{i-1}\psi + L_2\varphi^{i-2}\psi^2 + \ldots + L_{i-1}\varphi\psi^{i-1} + L_i\psi^i = 0, \tag{1}$$

ove L_k è una forma d'ordine $l_k = n - ia + k(a - b)$.

La (1) può scriversi:

$$V^n \equiv L_0\varphi^i + \psi V^{n-b} = 0, \tag{2}$$

ove L_0 ha ordine $l_0 = n - ia$ e V^{n-b} è la più generale ipersuperficie d'ordine $n - b$ avente $\mathcal{C}$ come varietà $(i - 1)$-pla.

Se denotiamo con $\xi(n, i)$ la postulazione della varietà i-pla $\mathcal{C}$

(7) M. NOETHER, *Sulle curve multiple di superficie algebriche*, « Annali di Matematica » (2) 5, pp. 163-177 (1871); cfr. anche: L. CAMPEDELLI, *Sulla postulazione di una curva i-pla*. « Rend. Palermo », t. LV, pp. 198-202 (1931).

(8) L. ROTH. *The postulation of a multiple surface*, « Proc. Camb. Phil. Soc. » (33) pp. 301-305 (1937).

per le V^n, e cioè il numero delle condizioni che si debbono imporre alle ipersuperficie d'ordine n dello spazio S_r perchè passino per $\mathfrak{C}$ con la molteplicità i, il numero dei parametri omogenei che compaiono nella (2) è:

$$\binom{n+r}{r} - \xi(n,\ i) = \binom{n-b+r}{r} - \tag{3}$$

$$- \xi(n-b,\ i-1) + \binom{n-ia+r}{r} - \varepsilon(n,\ i),$$

ove $\varepsilon(n,\ i)$ denota il massimo numero di ipersuperficie tra loro linearmente indipendenti d'ordine $n-ia$ che contengono B come parte.

Se $n-ia-b+r \geq 0$ risulta:

$$\varepsilon(n,\ i) = \binom{n-ia-b+r}{r};$$

se $n-ia-b+r<0$ risulta invece $\varepsilon(n,\ i)=0$.

Si ha così un procedimento ricorrente per calcolare $\xi(n,\ i)$:

$$\tag{4} \left\{ \begin{array}{l} \xi(n,i) = \xi(n-b,\ i-1) + \binom{n+r}{r} - \binom{n-b+r}{r} - \binom{n-ia+r}{r} + \varepsilon(n,\ i) \\ \xi(n-b,\ i-1) = \xi(n-2b,\ i-2) + \binom{n-b+r}{r} - \\ \qquad - \binom{n-2b+r}{r} - \binom{n-b-(i-1)a+r}{r} + \varepsilon(n-b,\ i-1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \xi(n-ib,\ 0) = 0. \end{array} \right.$$

Se h è il minimo intero $\leq i-1$ per cui riesca:

$$n-hb-(i-h)a-b+r = n-ia-b+r+h(a-b) \geq 0 \tag{5}$$

risulterà

$\varepsilon(n-sb,\ i-s)=0$ per $s=0,\ 1,\ 2, \dots,\ h-1$

$$\varepsilon(n - sb,\ i - s) = \binom{n - ia - b + r + s(a-b)}{r} \quad \text{per } s = h,\ h+1, \ldots,\ i-1;$$

e quindi dalle (4) si ottiene sommando:

$$(6) \quad \xi(n,\ i) = \binom{n + r}{r} - \binom{r}{n - ib + r} - \sum_{s=0}^{i-1} \binom{n - ia + r + s(a-b)}{r} +$$

$$+ \sum_{s=h}^{i-1} \binom{n - ia - b + r + s(a-b)}{r},$$

ove l'ultimo addendo della somma a secondo membro va posto $= 0$ quando per nessun intero $\leq i - 1$ sussista la (5).

La (6) *fornisce la postulazione effettiva della varietà* i*-pla* $\mathcal{C}$ *per le ipersuperficie d'ordine* n $\geq$ ia. *La postulazione virtuale é invece fornita dalla:*

$$(7) \quad \xi^*(n,\ i) = \binom{n + r}{r} - \binom{n - ib + r}{r} - \sum_{s=0}^{i-1} \binom{n - ia + r + s(a-b)}{r} +$$

$$+ \sum_{s=0}^{i-1} \binom{n - ia - b + r + s(a-b)}{r},$$

in quanto questa è la postulazione effettiva che si avrebbe qualora n fosse così elevato da rendere la (5) già valida per $h = 0$, e cioè $n \geq ia + b - r$.

Supponiamo ora $n < ia$; e basterà limitarci al caso $n \geq ib$, *perchè se* n $<$ ib *non esiste alcuna ipersuperficie* V^n *avente* $\mathcal{C}$ *come varietà* i*-pla;* una tale ipersuperficie, infatti, dovrebbe segare sopra una generica ipersuperficie del sistema lineare $\varphi + M\psi = 0$, ove M denota un'arbitraria forma d'ordine $a - b$, una varietà $(r-2)$-dimensionale d'ordine na che contiene come parte la $\mathcal{C}$ contata i volte; e ciò è assurdo perchè $na < iab$. Se $n < ia$ ogni ipersuperficie V^n avente $\mathcal{C}$ come varietà i-pla deve contenere B come parte, perchè altrimenti segherebbe su B una varietà d'ordine $nb \geq iab$. Dunque $V^n \equiv V^{n-b}\psi$. Ed anzi, si riconosce in modo immediato che se l è il minimo intero $(1 \leq l \leq i - 1)$ tale che $n - lb \geq (i - l)a$, ogni ipersuperficie d'ordine n che passi i-plamente per $\mathcal{C}$ è della forma: $V^n \equiv V^{n-lb}\psi^l$, ove V^{n-lb} è un'ipersuperficie d'ordine $n - lb$

costretta a passare per $\mathfrak{C}$ con la molteplicità $i-l$; e quindi la *postulazione effettiva* $\xi(n, i)$ è fornita in questo caso dalla:

$$\binom{n+r}{r} - \xi(n, i) = \binom{n-lb+r}{r} - \xi(n-lb, i-l).$$

Si ha dunque:

$$\xi(n, i) = \binom{n+r}{r} - \binom{n-ib+r}{r} - \sum_{s=0}^{i-l-1} \binom{n-ia+r+(s+l)(a-b)}{r} +$$

$$+ \sum_{s=h}^{i-l-1} \binom{n-ia-b+r+(s+l)(a-b)}{r}$$

ove h è il minimo intero $\leq i-l-1$ per cui:

$$n-ia-b+r+(h+l)(a-b) \geq 0.$$

Ci interessa per il seguito il caso speciale $a=b$. In questo caso la postulazione virtuale risulta:

$$\xi^*(n, i) = \binom{n+r}{r} - (i+1)\binom{n-ib+r}{r} + i\binom{n-(i+1)b+r}{r}.$$

Per quanto riguarda la postulazione effettiva si ha per $n \geq ib$:

$$\xi(n, i) = \xi^*(n, i) \quad \text{se} \quad n-ia-b+r \geq 0$$

$$\xi(n, i) = \binom{n+r}{r} - (i+1)\binom{n-ib+r}{r} \quad \text{se} \quad n-ia-b+r < 0,$$

mentre per $n < ib$ non esistono V^n passanti i-plamente per $\mathfrak{C}$.

3. Ciò premesso si consideri un S_r doppio irregolare V_r la cui ipersuperficie di diramazione Δ sia composta di 2μ ipersuperficie di un fascio $|F|$ generale, d'ordine b. Le ipersuperficie canoniche di V_r hanno come immagini nell'S_r le ipersuperficie d'ordine $n=\mu b-r-1$ che posseggono la varietà base $\mathfrak{C}^{b^2}$ di $|F|$ come luogo di punti di molteplicità $i=\mu-1$.

Poichè risulta:

$$\mu b - r - 1 - (\mu-1)b - b + r = -1 < 0$$

avremo:

$$\xi^*(\mu b - r - 1,\ \mu - 1) = \binom{\mu b - 1}{r} - \mu\binom{b-1}{r} + (\mu - 1)\binom{-1}{r}$$

$$\xi(\mu b - r - 1,\ \mu - 1) = \binom{\mu b - 1}{r} - \mu\binom{b-1}{r}.$$

Ne segue che i generi P_a, P_g dell'S_r doppio sono:

$$P_a = \mu\binom{b-1}{r} - (-1)^r(\mu - 1)$$

(8) $$P_g = \mu\binom{b-1}{r};$$

ed anzi, poichè quando $\mu b - r - 1 < (\mu - 1)b$, e cioè $b - 1 < r$, caso in cui non esistono ipersuperficie canoniche effettive, la (8) fornisce: $P_g = 0$, si ha che la (8) è valida per ogni valore di $b \geq 1$; e quindi, qualsiasi sia b, si trova che l'ultima irregolarità dell'S_r doppio è:

$$q_r = P_g - P_a = (-1)^r(\mu - 1).$$

Per valutare le irregolarità $q_2, q_3, \ldots, q_{r-1}$ si può considerare una $V_k (k = 2, 3, \ldots, r-1)$ « generale » dell'S_r doppio, ad esempio la varietà V_k caratteristica di un opportuno sistema lineare di ipersuperficie di V_r. Per una V_k che abbia come immagine nell'S_r uno spazio subordinato S_k (sicchè V_k è un S_k doppio la cui ipersuperficie di diramazione si ottiene segando Δ con l'S_k), risulta:

$$q_k = (-1)^k(\mu - 1),$$

e quindi, denotando con g_k il numero delle forme differenziali di prima specie e di dimensione k appartenenti all'S_r doppio:

$$g_r = \mu\binom{b-1}{r}$$

$$g_k = q_k + q_{k+1} = 0 \qquad (1 < k < r)$$

$$g_1 = q_2 = \mu - 1.$$

Si controlla in modo immediato che i numeri P_a, g_k sopra calcolati soddisfano la relazione di SEVERI-KODAIRA: $P_a = g_r - g_{r-1} + \ldots + (-1)^{r-1}g_1$ (9).

(9) F. SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche*, « Rend. Palermo », t. XXVIII, pp. 37-87 (1909); K. KODAIRA, loc. cit. in (4).