Bollettino
Unione Matematica Italiana

Davide Carlo Demaria

Sulle equazioni generali di primo grado in un corpo sghembo.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.1, p. 36–41.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_1_36_0>

Sulle equazioni generali di primo grado in un corpo sghembo.

Nota di Davide Carlo Demaria (a Torino)

Sunto. - *Vedi n. 1.*

1. Il prof. B. Segre, nella sua Memoria: *Elementi di geometria non lineare sopra un corpo sghembo* (1), ebbe occasione di considerare la seguente equazione:

$$ax + xb = c, \tag{1}$$

(1) Rend. Circolo Mat. Palermo, Serie II, tomo VII, fascicolo 1. 1958, pagg. 81, § 7.

ove a, b, c sono elementi assegnati di un corpo C non commutativo, ed x è l'incognita; più recentemente, durante il Convegno di Geometria Algebrica svoltosi a Taormina alla fine dell'ottobre 1958, propose di studiare in un qualunque corpo sghembo C la equazione:

$$\sum_{1}^{N}{}_{\iota}\, a_\iota x b_\iota + c = 0, \tag{2}$$

ove N denoti un qualunque numero intero positivo.

Qui mi occupo della (2) in un corpo non commutativo C avente una base finita, di n elementi $i_1, i_2, \ldots, i_n$, sopra il proprio centro Γ, ed ottengo i seguenti risultati:

1) *Considerato* C *come spazio vettoriale* S_n *a* n *dimensioni su* Γ *e* $\mathrm{Q(x)} = \sum_{1}^{n}{}_{\iota}\, \mathrm{a_\iota x b_\iota} + \mathrm{c}$ *come applicazione di* S_n *in sè,* Q(x) *è un'affinità* A *di* S_n*, e perciò la compatibilità e le eventuali soluzioni della* (2) *sono ricondotte allo studio dell'affinità* Q(x).

2) *Viceversa, ogni affinità* A (*anche degenere*) *di* S_n *determina univocamente una* Q(x).

2. Sia C un corpo non commutativo, Γ il suo centro e $i_1, i_2, \ldots$ $\ldots, i_n$ una base di C sopra Γ; vale a dire:

1) Γ sia formato da tutti e soli gli elementi γ di C tali che:

$$\gamma x = x \gamma \qquad \text{per ogni} \qquad x \in C;$$

2) ogni $x \in C$ sia espresso in uno ed in un solo modo nella forma:

$$x = \sum_{1}^{N}{}_{l}\, \gamma_l i_l, \qquad \gamma_l \in \Gamma.$$

Dunque, considerando C come spazio vettoriale S_n sopra Γ, x sarà il punto di coordinate: $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$.

Sia ora:

$$\sum_{1}^{N}{}_{\iota}\, a_\iota x b_\iota + c = 0 \tag{3}$$

l'equazione da risolvere, che chiamerò omogenea o non omogenea, secondo che è $c = 0$ oppure $c \neq 0$. Pongo per abbreviare:

$$Q(x) = \sum_{1}^{N}{}_{\iota}\, a_\iota x b_\iota + c\,; \qquad T(x) = \sum_{1}^{N}{}_{\iota}\, a_\iota x b_\iota\,.$$

È evidente che la $T(x)$ gode delle tre seguenti proprietà:

a) $T(0) = 0$;

b) $T(x + y) = T(x) + T(y), \qquad x, y \in C$:

c) $T(\gamma x) = \gamma T(x), \qquad \gamma \in \Gamma, \; x \in C$;

eppertanto, se:

$$x = \sum_1^n {}_l \, \gamma_l i_l, \qquad \bar{x} = T(x) = \sum_1^n {}_l \, \bar{\gamma}_l i_l,$$

$$T(i_l) = \sum_1^n {}_m \, \alpha_{lm} i_m;$$

si ha:

(4) $$T(x) = T(\sum_1^n {}_l \, \gamma_l i_l) = \sum_1^n {}_l \, \gamma_l T(i_l) = \sum_1^n {}_{lm} \, \alpha_{lm} \gamma_l i_m;$$

e cioè:

(5) $$\bar{\gamma}_m = \sum_1^n {}_l \, \alpha_{lm} \gamma_l;$$

epperò $T(x)$ *è una centroaffinità di* S_n.

Di conseguenza:

1) $Q(x)$ *è un'affinità* A *di* S_n.

2) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la* $Q(x) = 0$ *abbia una e una sola soluzione è che la* $T(x) = 0$ *ammetta la sola soluzione banale* $x = 0$. (²).

3) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la* (3) *ammetta una e una sola soluzione è che l'affinità* A *sia non degenere, cioè:*

$$\det \| \alpha_{lm} \| \neq 0.$$

4) *Se invece* $\det \| \alpha_{lm} \| = 0$, *ed è* $\rho < n$ *il rango della matrice* $\| \alpha_{lm} \|$, *la* (3) *ammette soluzioni, se e solo se* c *appartiene all'* $S_\rho \subset S_n$ *determinato dagli* n *punti* $Q(i_l)$; *e nel caso vi siano delle soluzioni esse riempiono tutto uno* $S_{n-\rho} \subset S_n$.

(²) Cfr. B. SEGRE, l. c., in cui implicitamente si trovano quasi tutti i risultati del presente numero.

3. Esposte le precedenti semplici osservazioni, mi propongo di far vedere che, viceversa, *ogni affinità* A *è esprimibile in uno ed in un solo modo mediante una* Q(x) *canonica,* della forma assegnata più oltre.

Basterà che dimostri che *ogni centroaffinità* B *di* S_n *determina una e una sola* T(x) *canonica.*

Ora, per la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma, si ha evidentemente che ogni $T(x)$ si può esprimere come una somma di n^2 o di n termini rispettivamente della forma:

$$(6) \qquad a) \qquad T(x) = \sum_{1}^{n}{}_{rs} \lambda_{rs} i_r x i_s, \qquad \lambda_{rs} \in \Gamma;$$

$$(6') \qquad b) \qquad T(x) = \sum_{1}^{n}{}_{l}\, a_l x i_l, \qquad a_l \in C.$$

Chiamo $x'_l = \sum_{1}^{n}{}_{m}\, a_{lm} i_m$ gli n punti corrispondenti agli n punti linearmente indipendenti $x_l = i_l$ $(l = 1, 2, \dots, n)$.

Esprimendo $T(x)$ nella forma (6), ho:

$$(7) \qquad T(x) = \sum_{1}^{n}{}_{rs} \lambda_{rs} i_r i_s, \qquad \lambda_{rs} \in \Gamma;$$

d'altra parte, la tabella di moltiplicazione del corpo, fornisce:

$$(8) \qquad i_r i_l i_s = \sum_{1}^{n}{}_{m}\, R_{rlsm} i_m,$$

sicchè ottengo:

$$(9) \qquad T(i_l) = \sum_{1}^{n}{}_{rsm} \lambda_{rs} R_{rslm} i_m = \sum_{1}^{n}{}_{m}\, a_{lm} i_m.$$

Da qui ricavo il seguente sistema di n^2 equazioni nelle n^2 incognite λ_{rs}, di cui devo dimostrare la compatibilità:

$$(10) \qquad \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, R_{rlsm} \lambda_{rs} = a_{lm} \qquad (l, m, r, s = 1, 2, \dots, n).$$

Precisamente devo far vedere che è:

$$\det \| R_{rlsm} \| \neq 0 \ \text{(3)};$$

(3) Questo determinante è di ordine n^2, e, precisamente, le coppie di indici l, m ne individuano le righe e le coppie r, s le colonne.

e ciò equivale a dire che risulta

$$T(x) \equiv 0 \ [4] \qquad \text{per ogni} \qquad x \in C,$$

se e soltanto se tutte le λ_{rs} sono nulle.

Sia per assurdo $T(x) \equiv 0$ con qualche $\lambda_{rs} \neq 0$. Per la (6') posso esprimere la $T(x)$ come somma di n termini del tipo

$$(11) \qquad T(x) = \sum_{1}^{n} {}_l \, a_l x i_l ,$$

ove le a_l denotano elementi non tutti nulli di C. Se $k \geq 2$ di questi sono diversi da zero, con opportuna scelta della base posso ridurmi ad avere $a_1 \neq 0$ (anzi moltiplicando la $T(x)$ a sinistra per a_1^{-1}, a_1 diventa eguale a 1), $a_2 \neq 0$, e quindi:

$$(12) \qquad T(x) = xi_1 + a_2 x i_2 + \sum_{3}^{k} {}_l \, a_l x i_l \equiv 0.$$

Ho ora due possibilità:

a) $a_2 \in \Gamma$,

b) $a_2 \notin \Gamma$.

Nel caso *a*), posto $i_2' = i_1 + a_2 i_2$, ottengo:

$$(13) \qquad T(x) = x(i_1 + a_2 x_2) + \Sigma \ldots = xi_2' + \Sigma \ldots \equiv 0.$$

ove nelle $\Sigma \ldots$ l'indice di sommazione ha la stessa variabilità che nella (12).

Nel caso *b*), considero le n espressioni $T_l'(x) = i_l^{-1} T(i_l x) \equiv 0$; per almeno una i_l, p. e. i_m, (poichè $a_2 \notin \Gamma$) avrò:

$$a_2 \neq i_m^{-1} a_2 i_m ;$$

epperò:

$$(13') \qquad \overline{T}(x) = T(x) - T_m'(x) = (a_2 - i_m^{-1} a_2 i_m) x i_2 + \Sigma \ldots \equiv 0.$$

Quindi, in ambedue i casi, mi sono costruito una $\overline{T}(x) \equiv 0$ con qualche λ_{rs} non nulla, avente un numero di termini non superiore a $k - 1$.

[4] Indico con 0 la centroaffinità identicamente nulla, vale a dire quella che fa corrispondere ad ogni punto di S_n l'origine.

Procedendo in tal modo ripetutamente, dopo un numero finito di passi, troverò una $T^*(x) = 0$ con un solo termine:

$$T^*(x) = pxq = 0, \tag{14}$$

ove $p \neq 0$ e $q \neq 0$.

Ma ciò è evidentemente impossibile, onde l'asserto.

Ad es.: se C è il corpo sghembo dei quaternioni, Γ è il corpo dei numeri razionali o reali, e la base è formata da:

$$i_1 = 1, \quad i_2 = i, \quad i_3 = j, \quad i_4 = k,$$

si ha:

$$\det \| R_{,lsm} \| = 2^{16} \neq 0.$$

5. Osservazione - I risultati del n. 2 possono estendersi ad ogni equazione (3) su di un'algebra avente base finita sopra un corpo commutativo Γ.

Inoltre, con riferimento ai numeri di Cayley ed alle equazioni

$$(15) \qquad \begin{aligned} &\sum_1^8 {}_{,s}\gamma_{,s}(i_{,}x)i_s + c = 0, \\ &\sum_1^8 {}_{,s}\gamma_{,s}i_{,}(xi_s) + c = 0, \end{aligned}$$

un calcolo diretto mostra che il relativo $\det \| R_{,lsm} \|$ è diverso da zero.

Perciò:

1) *Ogni affinità* A *dell'* S_8 *rappresentativo dei numeri di* Cayley *sopra un dato corpo commutativo, è esprimibile univocamente con una o l'altra delle* (15).

2) *Ogni equazione generalizzata di primo grado nei numeri di* Cayley *può ridursi a una qualunque delle forme* (15) ([5]).

([5]) Nell'equazione di primo grado più generale potrebbero a priori anche comparire termini della forma $b(ax)$, $(xc)d$, $c(ax)b$ ... ecc., mancando l'associatività della moltiplicazione.