Bollettino Unione Matematica Italiana

Luigi Antonio Rosati

I gruppi di collineazioni dei piani di Hughes.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.4, p. 505–513.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_4_505_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1958.

I gruppi di collineazioni dei piani di Hughes.

Nota di LUIGI ANTONIO ROSATI (a Firenze)

Sunto. - *Si determina la struttura del gruppo delle collineazioni dei piani non - desarguesiani finiti introdotti da* HUGHES.

Summary. - *The collineation group of non - desarguesian finite planes introduced by* HUGHES *is completely determined.*

G. ZAPPA [3] ha recentemente studiato il gruppo delle collineazioni dei piani non desarguesiani finiti introdotti da HUGHES [2] (seguendo G. ZAPPA, chiameremo tali piani piani di HUGHES), e, soffermandosi sul gruppo delle collineazioni del piano di ordine 9, ne ha determinato completamente la struttura.

Noi, utilizzando anche alcuni risultati di ZAPPA, abbiamo determinato completamente la struttura del gruppo delle collineazioni di ogni piano di HUGHES.

Il risultato che abbiamo ottenuto è il seguente: Se π è il piano di HUGHES relativo al quasicorpo del DICKSON R. e π_0 è il suo sottopiano (desarguesiano) relativo al centro F di R, il gruppo Σ delle collineazioni di π è dato dal prodotto $G\Gamma$, dove G è il gruppo, isomorfo al gruppo delle proiettività di π_0, costituito dai prolungamenti a tutto π delle proiettività di π_0, e Γ è il gruppo delle collineazioni indotte in π dagli automorfismi di R ed isomorfo al gruppo degli automorfismi di R. Se l'ordine di R è il quadrato di un numero primo si ha $\Sigma = G \times \Gamma$. Nel caso che l'ordine di R sia diverso da 9, Σ si può ulteriormente definire come sottogruppo di un notissimo gruppo.

1. Sia R un quasicorpo del DICKSON d'ordine $p^{2m} = q^2$ (p numero primo), avente per centro un campo di GALOIS F d'ordine q [1]. Sia V l'insieme delle terne ordinate di elementi non tutti nulli di R e V_0 l'insieme delle terne ordinate v di elementi non tutti nulli di F e delle terne che si ottengono moltiplicando gli elementi delle terne v per gli elementi diversi da zero di R. Sia π il piano di HUGHES relativo ad R. I punti di π sono le terne di V con l'identificazione $(kx, ky, kz) = (x, y, z)$ per ogni $k \neq 0$ in R [2].

[1] In R supponiamo che valga la proprietà distributiva a sinistra.

Le rette di π sono gli insiemi dei punti di π soddisfacenti alle equazioni (non identiche) del tipo ([2])

$$ax + by + cz + (a_1x + b_1y + c_1z)t = 0, \tag{1}$$

dove a, b, c, a_1, b_1, c_1 sono elementi variabili di F e t un elemento variabile di R che si può pensare non appartenente ad F. Le terne di V_0 e le equazioni $ax + by + cz = 0$ sono i punti e le rette di un piano desarguesiano π_0, contenuto in π. Le rette di π contenute in π_0 vi posseggono quindi $q+1$ punti, mentre i rimanenti $q^2 - q$ punti di ciascuna di esse non appartengono a π_0. Invece una retta di π non appartenente a π_0 ha in comune con π_0 uno ed un sol punto. Dualmente per un punto di π_0 passano $q+1$ rette di π_0 e $q^2 - q$ rette di π non appartenenti a π_0, e per un punto situato fuori di π_0 passa una ed una sola retta di π_0 [2].

Chiamando retta impropria di π la retta di equazione $z = 0$, punti impropri i suoi punti, e punti e rette proprie i punti non appartenenti alla retta impropria e le rette distinte da essa, si ha che ogni punto proprio di π si può determinare con una coppia ordinata di elementi di R (di F se il punto appartiene a π_0), coordinate non omogenee dei punti di π, mentre una retta propria di π è definita da un'equazione del tipo

$$ax + by + c + (a_1x + b_1y + c_1)t = 0, \tag{2}$$

con a, b, c, a_1, b_1, c_1 elementi variabili di F e t elemento variabile in R, ma non in F.

Infatti, considerato un punto, P, di π di coordinate (kx, ky, kz), e posto $X = z^{-1}x$, $Y = z^{-1}y$, si ha per $kz \neq 0$ $(kx, ky, kz) = ((kz)^{-1}kx, (kz)^{-1}ky, 1)$. e d'altra parte, tenuto conto che gli elementi diversi da zero di R formano gruppo rispetto alla moltiplicazione, si ha $(kz)^{-1} = z^{-1}k^{-1}$, perciò $(kx, ky, kz) = (X, Y, 1)$, con X, Y indipendenti dalla particolare terna usata per rappresentare P. Inoltre, se (x, y, z) verifica la (1), (X, Y) verifica la (2).

Si ha il seguente

TEOREMA 1 (ZAPPA [3]) – *Ogni proiettività di π_0 può prolungarsi in una collineazione di π.*

([2]) Nella nota [2] di HUGHES le rette di π sono definite diversamente. La nota [3] di ZAPPA mostra l'equivalenza della definizione di HUGHES e di quella data sopra.

In altre parole se A è una qualunque proiettività di π_0 e

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{aligned} \tag{3}$$

sono le sue equazioni, al variare di x, y, z in R, le (3) inducono una trasformazione di π in sè che è una collineazione.

Indicando con G il sottogruppo del gruppo delle collineazioni di π costituito dai prolungamenti a tutto π delle proiettività di π_0, si ha che G è isomorfo al gruppo di tutte le proiettività di π_0. La struttura di G è quindi perfettamente nota.

TEOREMA 2 - *Se σ è un qualunque automorfismo di* R *la corrispondenza* B *di* V *in sé di equazioni*

$$x' = \sigma x, \quad y' = \sigma y, \quad z' = \sigma z \tag{4}$$

induce in π una collineazione che lascia fermo π_0.

a) B porta un punto di π in un punto di π. Infatti se B porta (x, y, z) in (x', y', z'), tenuto conto che σ è un automorfismo di R, B porta anche (kx, ky, kz) in $(\sigma k \cdot x', \sigma k \cdot y', \sigma k \cdot z')$.

b) B è biunivoca sui punti di π. Infatti, se B porta (x, y, z) in (x', y', z'), detto τ l'automorfismo inverso di σ, la corrispondenza di equazioni

$$x = \tau x', \quad y = \tau y', \quad z = \tau z'$$

porta (x', y', z') in (x, y, z).

c) B muta una retta in una retta. Infatti se per una certa terna $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ di V sussiste l'eguaglianza

$$a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z} + (a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1\bar{z})t = 0,$$

posto $a' = \sigma a$, $b' = \sigma b$, $c' = \sigma c$, $a'_1 = \sigma a_1$, $b'_1 = \sigma b_1$, $c'_1 = \sigma c_1$, $t' = \sigma t$, sussiste anche l'eguaglianza

$$a'\sigma\bar{x} + b'\sigma\bar{y} + c'\sigma\bar{z} + (a'_1\sigma\bar{x} + b'_1\sigma\bar{y} + c'_1\sigma\bar{z})t' = 0\,; \tag{5}$$

onde se un punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ appartiene alla retta di π di equazione (1), il punto $(\sigma\bar{x}, \sigma\bar{y}, \sigma\bar{z})$ trasformato di $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ mediante la B, in base alla (5) appartiene alla retta di equazione

$$a'x + b'y + c'z + (a'_1x + b'_1y + c'_1z)t' = 0.$$

d) B muta in sè π_0 perchè un automorfismo di R muta un elemento di F in un elemento di F.

Il teorema è così completamente dimostrato.

Indicando con Γ il gruppo delle collineazioni di π di equazioni (4), si ha che Γ è isomorfo al gruppo degli automorfismi di R. La struttura di Γ è perciò perfettamente nota [4]; precisamente, se l'ordine di R è nove, Γ è un gruppo d'ordine 6 isomorfo al gruppo totale di sostituzioni su 3 oggetti; se l'ordine p^{2m} di R è diverso da 9, Γ è un gruppo ciclico d'ordine $2m$ (avvertiamo che R non è mai uno dei 7 quasicorpi del DICKSON eccezionali, perchè il centro di ognuno di essi è d'ordine 3, mentre nessuno di essi ha ordine 9).

TEOREMA 3. – *La corrispondenza* C *di equazioni*

$$(6) \qquad \begin{aligned} x' &= a_{11}\sigma x + a_{12}\sigma y + a_{13}\sigma z \\ y' &= a_{21}\sigma x + a_{22}\sigma y + a_{23}\sigma z \\ z' &= a_{31}\sigma x + a_{32}\sigma y + a_{33}\sigma z , \end{aligned}$$

dove σ *è un qualsiasi automorfismo di* R, a_{ij} (i, j $= 1, 2, 3$) *sono elementi di* F, $|a_{ij}| \neq 0$, *induce in* π *una collineazione che muta in sè* π_0. *Se* Σ *è il gruppo delle collineazioni di equazioni* (6) *si ha* $\Sigma = G\Gamma$. *Di più, se, e soltanto se, l'ordine di* R *è il quadrato di un numero primo si ha* $\Sigma = G \times \Gamma$.

È ovvio che la C è una collineazione che muta π_0 in sè. Infatti se A è la collineazione di π di equazioni (3), B la collineazione di π di equazioni (4), si ha $C = AB$. Quindi C è una collineazione di π e lascia fermo π_0 perchè sia A che B lasciano fermo π_0. Siccome poi, come si verifica facilmente, le collineazioni di equazioni (6) formano gruppo, detto Σ tale gruppo, si ha $\Sigma = G\Gamma$.

Dimostriamo ora che $G \cap \Gamma = 1$. Tutte le collineazioni di G inducono in π_0 delle proiettività, mentre dalle (4) si ricava che soltanto le collineazioni di Γ che subordinano in π_0 l'identità danno luogo a proiettività di π_0. Quindi le eventuali collineazioni comuni a G e a Γ sono quelle che inducono in π_0 l'identità. Siccome soltanto l'identità di G può lasciar fermi tutti i punti di π_0, ne viene che $G \cap \Gamma = 1$. Di conseguenza l'ordine di Σ è il prodotto dell'ordine di G e dell'ordine di Γ e vale 33696, se l'ordine di R è uguale a 9; vale $2mq^3(q^2 + q + 1)(q - 1)^2(q + 1)$, se l'ordine $q^2 = p^{2m}$ di R è diverso da 9.

Dimostriamo infine che si ha $\Sigma = G \times \Gamma$ se, e soltanto se, l'ordine di R è il quadrato di un numero primo. Basterà dimostrare che ogni collineazione di G è permutabile con qualunque collineazione di Γ se, e soltanto se, l'ordine di R è il quadrato di un numero primo. Infatti se A è la collineazione di G di equazioni (3), B la collineazione di Γ di equazioni (4), allora AB ha le equazioni (6), mentre, posto $b_{ij} = \sigma a_{ij}$, BA ha le equazioni

$$\begin{aligned} x' &= b_{11}\sigma x + b_{12}\sigma y + b_{13}\sigma z \\ y' &= b_{21}\sigma x + b_{22}\sigma y + b_{23}\sigma z \\ z' &= b_{31}\sigma x + b_{32}\sigma y + b_{23}\sigma z, \end{aligned}$$

e d'altra parte si ha $b_{ij} = k a_{ij}$, con k indipendente da i e da j, se, e soltanto se, σ lascia fermi tutti gli elementi di F. Siccome questo succede se, e solamente se, l'ordine di R è il quadrato di un numero primo, si ha quanto si voleva dimostrare.

Dato che sono note le strutture di G e di Γ, risulta nota anche la struttura di Σ.

Abbiamo già osservato che R non è un quasicorpo del Dickson eccezionale, quindi gli elementi di R si possono considerare anche come elementi di un campo di Galois, F', avente lo stesso ordine $q^2 = p^{2m}$ di R, lo stesso gruppo additivo e differente gruppo moltiplicativo. Allora, se l'ordine di R è diverso da 9, a è un qualsiasi elemento di R, σ un qualunque automorfismo di R, indicando con a^{p^r} la potenza p^r-ma di a in F', si ha $\sigma a = a^{p^r}$, con $0 \leq r < 2m$ [4]. Ne viene allora che, se R non ha l'ordine 9, alle collineazioni di Σ si possono dare anche le equazioni

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x^{p^r} + a_{12}y^{p^r} + a_{13}z^{p^r} \\ y' &= a_{21}x^{p^r} + a_{22}y^{p^r} + a_{23}z^{p^r} \\ z' &= a_{31}x^{p^r} + a_{32}y^{p^r} + a_{33}z^{p^r} \end{aligned}$$

con a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ elementi di F e $|a_{ij}| \neq 0$.

Quindi se consideriamo il piano desarguesiano π', di rango $q^2 \neq 9$, su F', Σ è isomorfo al gruppo delle collineazioni di π' che lasciano fermo π_0. Questo chiarisce ulteriormente, per $q^2 \neq 9$, la struttura di Σ.

Dimostriamo ora il

Teorema 4. – *Il gruppo Γ_1 delle collineazioni di π che lasciano fermo ogni punto di π_0 è isomorfo al gruppo degli automorfismi di* R *che lasciano fermo ogni elemento di* F.

Riferiamo π a un sistema di coordinate non omogenee. Sia S una qualunque collineazione di Γ_1; essa lascia ferma la retta, r, di equazione $y = 0$, e quindi porta un punto $(\bar{x}, 0)$ di R in un altro punto $(\bar{x}', 0)$ di R. La retta, s, di π di equazione $x = \bar{x}$, passante per il punto improprio della retta $x = 0$, Y_∞ (appartenente a π_0), avrà perciò per corrispondente in S una retta passante per Y^∞ e per $(\bar{x}', 0)$, cioè la retta s' di equazione $x = \bar{x}'$. Consideriamo allora il punto di π $(\bar{x}, \bar{y})$. Esso appartiene ad S; il suo corrispondente in S apparterrà ad s' ed avrà perciò le coordinate $(\bar{x}', \bar{y}')$ Questo significa che, se (x, y) è un punto generico di π e (x', y') il suo corrispondente in S, si ha

$$x' = \alpha x,$$

essendo α un'applicazione di R in sè

Analogamente si ha

$$y' = \beta y,$$

essendo β un'applicazione di R in sè.

Evidentemente tanto α che β lasciano fermo ogni elemento di F.

Si vede facilmente che α coincide con β. Infatti la retta $x = y$ appartiene a π_0 ed è quindi lasciata ferma da S; il suo punto generico (x, x) viene portato da S in $(\alpha x, \beta x)$, e quindi $\alpha = \beta$.

Vogliamo ora dimostrare che $\alpha = \beta$ è un automorfismo di R. Consideriamo la retta, u, di π di equazione $y = xt$, essendo t un qualsiasi elemento di R. Essa passa per $(0, 0)$ e quindi anche la sua corrispondente in S passerà per lo stesso punto. La u perciò avrà per corrispondente una retta, u', di equazione $y = xt'$, con t' elemento di R. Quindi, se (x, xt) è un generico punto di u e $(x', x't')$ il suo corrispondente in S, si ha

$$x' = \alpha x, \qquad x't' = \alpha(xt). \tag{7}$$

Siccome α lascia fermo ogni elemento di F, per $x = 1$ si ha $x' = 1$ e dalle (7) si ottiene $t' = \alpha t$, e perciò

$$\alpha x \alpha t = \alpha(xt). \tag{8}$$

In particolare, ricordando che α lascia fermo ogni elemento di F, per $t = -1$ si ottiene

$$-\alpha x = \alpha(-x). \tag{9}$$

Consideriamo ora la retta, v, di equazione $x + y + 1 = 0$; essa viene trasformata da S in sè, e quindi la retta $\alpha x + \alpha y + 1 = 0$ deve coincidere con la v. Di conseguenza, qualunque sia x in R, deve essere

$$\alpha x + \alpha(-1 - x) + 1 = 0,$$

cioè, tenuto conto della (9),

$$\alpha(x + 1) = \alpha x + 1. \tag{10}$$

Prendiamo ora due elementi qualsiasi di R, h e k. Si ha, tenuto conto della (8) e della (10),

$$\alpha(h+k) = \alpha[k(k^{-1}h+1)] = \alpha k\alpha(k^{-1}h+1) = \alpha k[\alpha(k^{-1}h)+1] =$$
$$= \alpha k[\alpha k^{-1}\alpha h + 1] = \alpha(kk^{-1})\alpha h + \alpha k = \alpha h + \alpha k.$$

Dunque, qualunque siano h e k in R, abbiamo

$$\alpha(h+k) = \alpha h + \alpha k. \tag{11}$$

La (8) e la (9), insieme all'osservazione già fatta che α lascia fermo ogni elemento di F, dicono che α è un automorfismo di R che muta in sè tutti gli elementi di F. Siccome poi, per ogni automorfismo α di R che lasci fermo ogni elemento di F, la corrispondenza fra i punti di π di equazioni $x' = \alpha x$, $y' = \alpha y$ dà luogo a una collineazione di π che lascia fermo ogni punto di π_0, il teorema è completamente dimostrato.

Ritornando a coordinate omogenee, si ha che ogni collineazione di π che lasci fermo ogni punto di π_0 ha le equazioni

$$x' = k\alpha x, \qquad y' = k\alpha y, \qquad z' = k\alpha z, \tag{12}$$

dove k è un qualsiasi elemento di R diverso da zero e α un automorfismo di R.

Ora [4] se R è d'ordine 9 (e quindi F d'ordine 3), il gruppo degli automorfismi di R è isomorfo al gruppo totale di sostituzioni su tre oggetti e ogni automorfismo di R lascia fermi tutti gli elementi di F; mentre, se l'ordine $q^2 = p^{2m}$ di R è diverso da 9, il gruppo degli automorfismi di R è ciclico d'ordine $2m$, ma soltanto un suo sottogruppo d'ordine 2 lascia fermi tutti gli elementi di F. Ne viene che in ogni caso la struttura di Γ_1 è perfettamente nota.

Teorema 5. – *Σ è il gruppo delle collineazioni di π che mutano in sè π_0.*

Indichiamo per un momento con K il gruppo delle collineazioni di π che mutano π_0 in sè. Sia T una qualunque collineazione appartenente a K; essa subordina in π_0 una collineazione, e quindi opera in π_0 come vi opera una conveniente collineazione C appartenente a Σ (siccome $\Sigma = G\Gamma$ per ogni collineazione, U, di π_0 si hanno in Σ 6 collineazioni, se l'ordine di R è uguale a 9, 2 collineazioni, se l'ordine di R è diverso da 9, che subordinano in π la collineazione U). Pertanto $C^{-1}T$ lascia fermo ogni punto di π_0, ossia coincide con una collineazione S in Γ_1; vale a dire $T = CS$, da cui $K = \Sigma \Gamma_1$. Siccome poi $\Sigma = G\Gamma$, dato che Γ contiene Γ_1, si ha di conseguenza $K = \Sigma$, come si voleva dimostrare.

2. Rimane ora da provare che ogni collineazione di π lascia fermo π_0, dopodichè risulterà che Σ coincide col gruppo di tutte le collineazioni di π.

Cominciamo col provare il seguente

LEMMA 1. – *Il gruppo Σ é transitivo sui punti di π non appartenenti a π_0.*

Per dimostrare il lemma basta dimostrare che G è transitivo sui punti di π non appartenenti a π_0. Siano $P(x_1, x_2, x_3)$, $P'(x_1', x_2', x_3')$ due punti di π non appartenenti a π_0; vogliamo dimostrare che esiste una collineazione di G che porta P in P', ossia vogliamo far vedere che si possono determinare in F i coefficienti c_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ di una sostituzione lineare in modo che si abbia

$$x_i' = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + c_{i3}x_3 \quad (i = 1, 2, 3), \ |c_{ij}| \neq 0. \tag{13}$$

Sia t un elemento di R non appartenente a F; al variare di a e b in F, $a + bt$ fornisce q^2 elementi distinti di R e quindi tutti gli elementi di R. Sarà allora $x_i = a_i + b_i t$, $x_i' = a_i' + b_i' t$ $(i = 1, 2, 3)$, essendo a_i, b_i, a_i', b_i' $(i = 1, 2, 3)$ elementi di F univocamente determinati da x_i e x_i'. Il sistema (13) diventa di conseguenza

$$\begin{aligned} a_i' &= c_{i1}a_1 + c_{i2}a_2 + c_{i3}a_3 \\ b_i' &= c_{i1}b_1 + c_{i2}b_2 + c_{i3}b_3, \end{aligned} \qquad |c_{ij}| \neq 0. \tag{14}$$

Tenuto conto che P e P' non appartengono a π_0, a_1, a_2, a_3 non sono tutti nulli, e così b_1, b_2, b_3; a_1', a_2', a_3'; b_1', b_2', b_3'. Consideriamo quindi i punti di π_0 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $A'(a_1', a_2', a_3')$, $B'(b_1', b_2', b_3')$. Siccome una proiettività di π_0 è determinata da due quaterne di punti corrispondenti, tre a tre non allineati, esisterà una proiettività di π_0 che porta A e B rispettivamente in A' e B'. Il sistema (14) ammette perciò soluzioni nelle incognite c_{ij} e il lemma è dimostrato.

Come fa G. ZAPPA in [3] si dimostrano poi i seguenti quattro lemmi.

LEMMA 2. – *Una collineazione di π appartenente a* G, *la quale subordini in π_0 un'omologia, è essa stessa un'omologia.*

LEMMA 3. – *Comunque si prendano un punto* P *e una retta* r *incidenti, appartenenti a* π_0, *esiste in* G *qualche omologia (speciale) non banale di* π *di centro* P *e asse* r.

LEMMA 4. – *Il gruppo* Σ *è transitivo sull'insieme delle coppie punto–retta incidenti non appartenenti a* π_0.

LEMMA 5. – *Le coppie punto–retta incidenti,* P, r, *di* π *si suddividono rispetto a* Σ *in quàttro sistemi di transitività: a) coppie con* P *ed* r *in* π_0*; b) coppie con* P *in* π_0 *ed* r *non in* π_0*; c) coppie con* P *non in* π_0, r *in* π_0*; d) coppie con* P *ed* r *non in* π_0.

Come in [3] si può allora dimostrare il

TEOREMA 6. – *Il gruppo* Σ, *di cui al teorema 3, è il gruppo delle collineazioni del piano di* HUGHES π.

Enunciamo soltanto le linee generali della dimostrazione, rimandando per i particolari alla nota di ZAPPA. Supponiamo per assurdo che il gruppo $\bar{\Sigma}$ delle collineazioni di π sia più ampio di Σ; allora si vede che $\bar{\Sigma}$ è transitivo rispetto all'insieme di tutte le coppie punto–retta incidenti. Dal lemma 2 discende quindi che se $\bar{\Sigma}$ è più ampio di Σ, comunque si prendano in π un punto P ed una retta r incidenti, esiste almeno un'omologia speciale non banale di centro P ed asse r. Ma, per un teorema di GLEASON [1], un piano grafico finito in cui, per ogni coppia punto–retta incidenti, esiste almeno un'omologia speciale non banale di centro P ed asse r, è desarguesiano. Perciò, se $\bar{\Sigma}$ è più ampio di Σ, π è desarguesiano. Poichè π non è desarguesiano (HUGHES [2]), $\bar{\Sigma}$ non può essere più ampio di Σ e il teorema è dimostrato.

Come conseguenza di questo teorema si ha che le equazioni di una qualsiasi collineazione del piano di HUGHES π, definito sopra il quasicorpo del DICKSON R di ordine $q^2 = p^{2m}$ avente per centro un campo di GALOIS F di ordine q, sono date dalle (6).

BIBLIOGRAFIA

[1] A. M. GLEASON, *Finite Fano planes*, « Amer. J. Math., » 78, 797-807 (1956).

[2] D. H. HUGHES, *A class of non-Desarguesian projective planes*, « Canadian J. Math., » 9, 378-388 (1957).

[3] G. ZAPPA, *Sui gruppi di collineazioni dei piani di Hughes*, « Boll. U. M. I., » (1957), Serie III, Anno XII, pp. 507-516.

[4] H. ZASSENHAUS, *Über endliche Fastkörper*, « Abhandlungen aus dem Mathem. Seminar der Hamburg. Univ. » 11 (1935), pp. 187-220.