BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ANTONIO CHIFFI

Estensione del teorema di convergenza del metodo dei momenti di S. Faedo.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 12
(1957), n.4, p. 591-595.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_4_591_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Estensione del teorema di convergenza del metodo dei momenti di S. Faedo.

Nota di ANTONIO CHIFFI (a Pisa)

Sunto. - Si veda il n. 1.

1. Sulla semistriscia (S) del piano (x, t) definita da:

$$0 \leq x \leq c; \quad t \geq 0$$

è data l'equazione:

$$(1) \quad L[u] = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial t} + cu = f,$$

dove i coefficienti e il termine noto f sono funzioni di x e t , definite in (S). Si ricercano, tra le funzioni continue in (S) con le loro derivate prime e seconde, quelle che soddisfano alla (1) ed inoltre verificano le *condizioni iniziali*:

$$(2) \quad u(x, 0) = g(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g_1(x)$$

e le condizioni al contorno:

$$(3) \quad u(0, t) = f_1(t); \quad u(c, t) = f_2(t).$$

Perchè il problema abbia senso occorre che le (1), (2) e (3) siano compatibili e che i secondi membri delle (2) e (3) abbiano le derivate richieste dalla (1).

S. FAEDO ⁽¹⁾ ha dato un metodo generale per l'analisi esistenziale e quantitativa di tali problemi, detti problemi di propagazione per l'interpretazione che se ne può dare nella Fisica Matematica.

Per applicare tale metodo si trasforma, mediante un opportuno cambiamento di variabili, il problema enunciato nell'equivalente a *condizioni omogenee*:

$$(1') \quad -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2a_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + a \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + b_1 \frac{\partial v}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial t} + cv = F$$

⁽¹⁾ S. FAEDO, *Un nuovo metodo per l'analisi esistenziale e quantitativa dei problemi di propagazione*, « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa », S. III, vol. I, 1947 (stampato nel 1949); pag. 1-40.

$$(2') \quad v(x, 0) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = 0$$

$$(3') \quad v(0, t) = v(c, t) = 0.$$

Si costruisce poi una successione di funzioni nel seguente modo : si sceglie un sistema di funzioni $\{\varphi_i(x)\}$, definite nell'intervallo $(0, c)$, annullantesi agli estremi di detto intervallo e soddisfacenti ad opportune condizioni di completezza (si può scegliere, ad esempio, il sistema: $\left\{ \text{sen} \frac{i\pi x}{c} \right\}$, $i = 1, 2, \dots$); si pone:

$$(4) \quad v_n(x, t) = \sum_{i=1}^n c_{i,n}(t)\varphi_i(x)$$

e si impone alle funzioni $c_{i,n}(t)$ di soddisfare al sistema di n equazioni differenziali lineari ordinarie del secondo ordine, riducibile a forma normale:

$$(5) \quad \int_0^c L[v_n] - F\{\varphi_i\} dx = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

ed alle condizioni iniziali: $c_{i,n}(0) = 0$; $c'_{i,n}(0) = 0$.

La $v_n(x, t)$ così determinata si chiama n -esima approssimazione del metodo dei momenti. Lo stesso autore ha dato larghi criteri per la convergenza uniforme della successione costruita verso la soluzione cercata, in maniera che il metodo seguito si rivela anche un valido strumento per l'analisi esistenziale di tali problemi.

L'unica condizione quantitativa è imposta sul coefficiente a , per il quale si suppone:

$$(6) \quad a > 0$$

in tutto (S). Nel presente lavoro si dimostra che i medesimi criteri continuando a valere nella ipotesi più generale che la (1) sia del tipo iperbolico, vale a dire che si abbia:

$$a + a_1^2 > 0$$

lasciando solo la condizione:

$$(8) \quad a(x, 0) > 0,$$

che assicura che il segmento $(0 \leq x \leq c, t = 0)$ portante i dati iniziali non ha in alcuno dei suoi punti direzione caratteristica.

2. Se la funzione $a(x, t)$ è continua, è possibile determinare per la (8) un numero $\delta > 0$ tale che in tutti i punti del rettangolo: $(0 \leq x \leq c; 0 \leq t \leq \delta)$ si abbia:

$$(9) \quad a(x, t) > 0$$

Detto n un intero positivo, costruiamo una funzione $\lambda_n(t)$ nel modo seguente: per $0 \leq t \leq \delta$ la si definisca uguale ad un polinomio di grado $2n + 1$ soddisfacente alle condizioni:

$$\begin{aligned} \lambda_n(0) = \lambda'_n(0) = \dots = \lambda_n^{(n)}(0) = 0; \\ \lambda_n(\delta) = 1; \lambda'_n(\delta) = \dots = \lambda_n^{(n)}(\delta) = 0. \end{aligned}$$

Un tale polinomio soddisfa anche, come subito si verifica, alla condizione $0 < \lambda_n(t) < 1$ per $0 < t < \delta$. Poniamo poi $\lambda_n \equiv 0$ per $t < 0$ e $\lambda_n(t) = 1$ per $t > \delta$. Prolunghiamo la definizione della funzione $a_1(x, t)$ per $0 \leq x < c$ e $t < 0$ definendola ivi uguale a zero. Consideriamo l'equazione differenziale ordinaria:

$$(10) \quad t'(x) = -\lambda_n(t)a_1(x, t).$$

La funzione a secondo membro è definita per $0 \leq x \leq c$ e qualunque sia t . Le sue derivate fino a quelle di ordine n esistono ivi e sono continue se lo sono le corrispondenti di a_1 ; per $t > \delta$ coincidono con queste a meno del segno.

La (10) con la condizione iniziale: $t(0) = \tau$ è certamente risolvibile in grande nell'intervallo $(0, c)$ e la soluzione è unica, se ad esempio ⁽²⁾, la funzione $a_1(x, t)$ è continua con la derivata: $\frac{\partial a_1}{\partial t}$ e questa risulta limitata in tutta (S) . Le curve integrali così trovate soddisfano alla disuguaglianza:

$$(11) \quad -t'^2 - 2a_1 t' + a > 0.$$

Infatti il secondo membro della (10) risulta essere, per $t > \delta$, la semisomma delle radici del trinomio a primo membro della (11), mentre per $0 \leq t \leq \delta$ vale la (9) ed è $|t'| = \lambda_n |a_1| \leq |a_1|$ e la (11) è soddisfatta sia nell'uno che nell'altro caso.

3. Le curve integrali trovate si possono scrivere nella forma:

$$(12) \quad t = t(x, \tau)$$

(2) Cfr. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Zanichelli, Bologna, 1931, p. I, cap. I, pag. 14.

considerandole cioè come funzioni del valore iniziale τ . La funzione $t(x, \tau)$ è continua; le sue derivate parziali fino a quelle di ordine n sono continue se anche α_1 possiede derivate parziali fino a quelle di ordine n continue ⁽³⁾.

Consideriamo le formole di trasformazione:

$$(13) \quad \begin{cases} x = \xi & 0 \leq \xi \leq c \\ t = t(\xi, \tau) & \tau \geq 0 \end{cases}$$

e dimostriamo che trasformano la semistriscia (Σ) del piano (ξ, τ) :

$$0 \leq \xi \leq c \quad \tau \geq 0$$

nella semistriscia (S) del piano (x, t) e la corrispondenza è biunivoca e continua. Consideriamo la curva integrale della (10) passante per il punto $(\bar{x}, \bar{t})$ di (S); questa si può scrivere nella forma:

$$(14) \quad t_x = f(x, \bar{x}, \bar{t})$$

e la funzione $f(x, \bar{x}, \bar{t})$ è una funzione continua con le derivate parziali fino a quelle dello stesso ordine di quello considerato per la funzione $t(\xi, \tau)$ della (13). Se è $\bar{t} > 0$ è: $f(x, \bar{x}, \bar{t}) > 0$ per ogni x di $(0, c)$. Infatti se fosse per $x = x_1$, $f(x_1, \bar{x}, \bar{t}) < 0$ vi sarebbe un x_2 di $(0, c)$ con $f(x_2, \bar{x}, \bar{t}) = 0$ e dal punto $(x_2, 0)$ uscirebbe, oltre all'integrale (14), anche l'integrale $t = 0$ della (10). Perciò è:

$$\tau = f(0, \bar{x}, \bar{t}) > 0.$$

Inoltre è immediato che se è $\bar{t} = 0$ è anche $\tau = 0$. Posto:

$$\tau = \tau(x, t) = f(0, x, t),$$

le formole:

$$(15) \quad \begin{cases} \xi = x & 0 \leq x \leq c \\ \tau = \tau(x, t) & t \geq 0 \end{cases}$$

danno la trasformazione inversa della (13).

Eseguiamo sulla equazione (1') il cambiamento di variabili (13). Per fare ciò senza alterare le proprietà di continuità della funzione incognita, occorre che le funzioni $t(\xi, \tau)$ e $\tau(x, t)$ di (13) e (15) siano continue con le loro derivate prime e seconde.

⁽³⁾ Cfr. G. SANSONE, loc. cit. in ⁽²⁾, p. I, cap. I, pag. 25-30. Qui la dimostrazione si arresta alle derivate prime, ma può continuarsi per le derivate di ordine qualunque. Cfr. ad es. O. NICOLETTI, *Sugli integrali delle equazioni differenziali, etc.*, « Rend. Acc. Naz. Lincei, (5), vol. IV, 1895, pag. 316.

Eseguito sulla (1') il cambiamento di variabili (13), essa appare della forma:

$$\mathfrak{L}[v(\xi, \tau)] = -v_{\xi\xi} + 2\alpha_1 v_{\xi\tau} + \alpha v_{\tau\tau} + \beta_1 v_{\xi} + \beta v_{\tau} + \gamma v = \mathfrak{F}(\xi, \tau),$$

con:

$$\alpha = -\tau_{\xi\xi}^2 + 2\alpha_1 \tau_{\xi\tau} + \alpha \tau_{\tau}^2,$$

ovvero, esprimendo le derivate di τ rispetto a x e t mediante quelle di $t(\xi, \tau)$ rispetto a ξ e τ :

$$\alpha = \frac{1}{(\partial t / \partial \tau)^2} \left[-\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}\right)^2 - 2\alpha_1 \left(\frac{\partial t}{\partial \xi}\right) + \alpha \right]$$

e per la (11) risulta $\alpha > 0$.

Se dunque consideriamo il problema differenziale:

$$(16) \quad \mathfrak{L}[v(\xi, \tau)] = \mathfrak{F}(\xi, \tau)$$

$$(17) \quad \begin{cases} v(\xi, 0) = 0 & \frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi, 0) = 0 \\ v(0, \tau) = v(c, \tau) = 0 \end{cases}$$

ad esso si possono applicare i teoremi di S. FAEDO, a patto di verificare le ipotesi di regolarità ivi enunciate per i coefficienti di $\mathfrak{L}[\]$ e per $\mathfrak{F}$: Queste ipotesi sono soddisfatte se lo sono per i coefficienti ed il termine noto della (1'), con la sola aggiunta di ulteriori condizioni sulla funzione α_1 ; precisamente bisognerà supporre che essa sia continua con le derivate richieste dai citati teoremi con quelle che da queste si ottengono derivandole ulteriormente rispetto a t due volte ed inoltre che la derivata $\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}$ si mantenga limitata in (S).

È immediato che operando sulla soluzione del problema (16)-(17) con la trasformazione (15) si ottiene una soluzione del problema (1')-(3'), come pure operando con la medesima trasformazione sulla successione costruita col metodo dei momenti per il problema (16)-(17) si ottiene una successione che converge verso la soluzione del problema (1')-(3').

Si conclude che i teoremi di unicità, di esistenza e di convergenza dati da S. FAEDO nella memoria citata in (1), valgono non solo nella ipotesi (6), ma anche nella ipotesi (7), più generale.