

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

FRANCESCO SPERANZA

## Proprietà proiettive delle trasformazioni dualistiche.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 12*  
(1957), n.4, p. 552–565.

Zanichelli

<[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1957\\_3\\_12\\_4\\_552\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_4_552_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

## Proprietà proiettive delle trasformazioni dualistiche.

Nota di FRANCESCO SPERANZA (a Bologna)

**Sunto.** - Si definiscono alcuni enti proiettivamente covarianti delle trasformazioni dualistiche fra piani sovrapposti; si studiano poi queste in relazione agli enti definiti e ad altri già noti.

**Summary.** - Some new configurations projectively associated to dualistic transformations are defined; dualistic transformations are also studied by means of these and other known configurations.

1. Com'è noto, si dice *trasformazione dualistica* fra due piani  $\pi$ ,  $\pi$  una corrispondenza fra i punti di  $\pi$  e le rette di  $\pi$ . Nel presente lavoro studio, dal punto di vista della geometria proiettiva, le trasformazioni dualistiche fra piani sovrapposti <sup>(1)</sup>.

In relazione ad una trasformazione dualistica  $\tau$  sussistono enti analoghi ai ben noti enti relativi ad una trasformazione puntuale: così si hanno le *direzioni caratteristiche* di  $\pi$  e quindi le *curve caratteristiche* <sup>(2)</sup>.

Si possono però definire dei nuovi enti, come apparirà nel presente lavoro. Fra tali enti sono particolarmente notevoli le *curve canoniche*:  $\tau$  si dirà *di tipo generale* quando queste costituiscono una rete (nn. 3-5), *di tipo parabolico* quando formano una sola famiglia (n. 6). Non esistono trasformazioni per le quali le curve canoniche siano indeterminate (n. 7). Per ciascuno dei tipi precedenti si trova un sistema completo d'invarianti fondamentali, e si precisano le condizioni affinché due trasformazioni siano omografiche.

Si hanno varie proprietà ponendo in relazione le curve cano-

(1) Lo studio, dal punto di vista proiettivo, delle trasformazioni dualistiche fra piani distinti non differisce da quello delle trasformazioni puntuali.

(2) Se  $A$  è un punto di  $\pi$ , ed  $a$  la retta corrispondente, si dirà *caratteristica* una direzione uscente da  $A$ , tale che ad una curva ad essa tangente e dotata di flesso in  $A$  corrisponda un involuppo avente  $a$  come tangente cuspidale (la cuspide si dirà *punto caratteristico* di  $a$ ): analogamente alle curve caratteristiche, si possono poi definire gli *inviluppi caratteristici* in  $\pi$ .

niche con il tritessuto caratteristico: in particolare, si dà una costruzione delle trasformazioni che realizzano una deformazione proiettiva della loro rete canonica (n. 5). Infine si dimostra l'esistenza e si determina la generalità delle trasformazioni di tipo generale aventi per rete canonica una rete assegnata, e delle trasformazioni di tipo parabolico aventi per curve canoniche le curve di una famiglia data (n. 8), trovando, grazie a risultati ivi conseguiti, la rappresentazione analitica delle trasformazioni di tipo parabolico per cui le curve canoniche sono rette (n. 9).

In una prossima Nota riprenderò lo studio delle trasformazioni dualistiche negli spazi di dimensione  $> 2$ .

2. Sia  $\mathcal{T}$  una trasformazione dualistica fra due piani sovrapposti  $\pi$  (punteggiato) e  $\bar{\pi}$  (rigato); siano inoltre  $A$  un generico punto di  $\pi$  ed  $a$  la retta ad esso corrispondente in  $\mathcal{T}$ .

Supporremo sempre che il punto  $A$  e la retta  $a$  non si appartengano <sup>(3)</sup>.

Se  $A'$ ,  $a'$  è una coppia di elementi corrispondenti, infinitamente prossimi ad  $A$ ,  $a$  rispettivamente, la corrispondenza fra la direzione  $AA'$  e il punto  $(a, a')$  è una proiettività. Se alla  $AA'$  si associa la retta che da  $A$  proietta il punto  $(a, a')$ , si ha nel fascio di centro  $A$  una proiettività  $\Gamma$  <sup>(4)</sup>; la coppia  $A, a$  si dirà *generale*, o *parabolica*, oppure *identica*, secondoche  $\Gamma$  possiede due direzioni unite distinte, oppure due coincidenti, oppure è l'identità <sup>(5)</sup>. Indicheremo col nome di *curve canoniche* di  $\mathcal{T}$  quelle curve che in ogni loro punto sono tangenti ad una delle direzioni unite in  $\Gamma$ . Ad esse corrispondono, in  $\mathcal{T}$ , degli *inviluppi* che diremo pure *canonici*, che si possono, del resto, definire in modo duale.

Indichiamo con  $x, y(u, v)$  le coordinate di  $A(a)$ ; le equazioni di  $\mathcal{T}$  siano:

$$(1) \quad u = f(x, y) \quad v = \varphi(x, y).$$

L'equazione di  $\Gamma$  è

$$(2) \quad \{ \varphi_y + x[f\varphi_y] \} k\bar{k} + \{ \varphi_x + x[f\varphi_x] \} \bar{k} + \{ f_y + y[\varphi f_y] \} k + \{ f_x + y[\varphi f_x] \} = 0$$

(3) Per le trasformazioni (dette di *tipo nullo*) nelle quali tutti gli elementi corrispondenti si appartengono, cfr. A. TERRACINI, *Trasformazioni dualistiche di tipo nullo e sistemi « G » proiettivamente deformabili*, « Rend. Accad. Naz. Lincei » (10) 8, 89-94 (1951<sub>2</sub>).

(4) La proiettività  $\Gamma$  è stata introdotta da ENEA BORTOLOTTI, *Sulla geometria proiettiva differenziale delle trasformazioni dualistiche*, « Rend. Accad. Naz. Lincei », (6) 28, 224-229 (1938<sub>2</sub>).

(5) Si noti che le direzioni unite di  $\Gamma$  dipendono dall'intorno del 1° ordine della coppia  $A, a$ .

dove  $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $[\varphi f_x] = \varphi f_x - f \varphi_x$  e analoghe; l'equazione della retta  $AA'$  è  $Y - y = k(X - x)$ , mentre  $Y - y = \bar{k}(X - x)$  è quella della retta corrispondente. L'equazione differenziale delle curve canoniche si ottiene ponendo nella (2)  $k = \bar{k} = \frac{dy}{dx}$ .

Assumiamo l'origine del sistema di riferimento in  $A$  e la retta  $x_3 = 0$  in  $a$ : gli sviluppi in serie delle (1) sono

$$u = a_{11}x + a_{12}y + [2] \quad v = a_{21}x + a_{22}y + [2]$$

e la (2) diventa

$$(2') \quad a_{22}k\bar{k} + a_{21}\bar{k} + a_{12}k + a_{11} = 0.$$

Le correlazioni tangenti a  $\mathcal{C}$  nella coppia  $A, a$  (che approssimano  $\mathcal{C}$  fino all'intorno del 1° ordine) sono

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ u_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ u_3 = \lambda x_1 + \mu x_2 + x_3. \end{array} \right. \quad (\lambda, \mu \text{ parametri}).$$

Fra di esse ve n'è una (ed una sola) nella quale  $A$  ed  $a$  si corrispondono in doppio modo; essa si ha per  $\lambda = \mu = 0$  e si indicherà col nome di *correlazione principale* <sup>(6)</sup>.

3. Supponiamo che la coppia  $A, a$  sia generale (n. 2). Se assumiamo come rette  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  le rette  $a_1, a_2$  unite in  $\Gamma$ , ne segue  $a_{11} = a_{22} = 0$ . Le coniche (luogo) d'incidenza delle correlazioni tangenti formano un sistema lineare  $\infty^2$ , con punti base nei punti  $(a, a_1)$  ed  $(a, a_2)$ . La conica  $\mathcal{C}_0$  relativa alla correlazione principale ha l'equazione

$$(a_{12} + a_{21})x_1x_2 + x_3^2 = 0$$

<sup>(6)</sup> In una trasformazione *puntuale* fra spazi distinti l'intorno del 1° ordine non è sufficiente a caratterizzare un'omografia, fra le omografie tangenti; cfr. M. VILLA, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari*. I: *Intorno del 2° ordine*, « Atti Accad. Naz. Lincei Rend. », (8) 4, 55-61 (1948). Nel caso delle trasformazioni puntuali fra spazi sovrapposti, l'intorno del 1° ordine determina delle omografie tangenti, che sono però di tipo particolare; cfr. L. MURACCHINI, *Sulle trasformazioni puntuali fra piani proiettivi sovrapposti*, « Boll. U. M. I. » (3) 9, 360-366 (1954); F. SPERANZA, *Sulle trasformazioni puntuali fra spazi proiettivi sovrapposti*, « Boll. U. M. I. » (3) 10, 61-68 (1955).

ed è caratterizzata dal fatto che incontra le coniche spezzate nelle rette  $a$ ,  $a_1$  ed  $a$ ,  $a_2$  solo nei punti base. La caratteristica di  $\Gamma$  vale

$$\gamma = -\frac{a_{12}}{a_{21}} \quad (7).$$

Poichè la coppia in questione è generale, si ha  $a_{12} + a_{21} \neq 0$ . Possiamo quindi assumere il punto unità su  $\mathcal{C}_0$ ; da ciò segue  $a_{12} + a_{21} = -1$ . Gli sviluppi in serie delle equazioni di  $\mathcal{C}$  sono quindi:

$$u = \frac{\gamma}{1-\gamma} y + [2] \qquad v = \frac{1}{\gamma-1} x + [2].$$

4. Sia ora  $\mathcal{C}$  una trasformazione dualistica per la quale la generica coppia di elementi corrispondenti sia del tipo generale; diremo che  $\mathcal{C}$  è di tipo generale. Nel piano  $\pi \equiv \pi$  assegniamo un sistema di riferimento mobile, costituito da tre punti (analitici)  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ , per il quale valgono le formule di FRENET

$$dA_i = \sum_k \omega_{ik} A_k$$

essendo le  $\omega_{ik}$  forme di PFAFF nei differenziali dei parametri dai quali dipende il sistema di riferimento; converremo di porre, com'è lecito,

$$\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} = 0.$$

Posto

$$a_0 = |A_1 A_2| \qquad a_1 = |A_2 A_0| \qquad a_2 = |A_0 A_1|,$$

(7) L'invariante  $\gamma$  (che è proprio delle trasformazioni dualistiche fra piani sovrapposti) è indipendente dagli invarianti metrici di una trasformazione dualistica: per questi ultimi, cfr. F. TRICOMI, «Densità» di un continuo di punti o di rette e «densità» di una corrispondenza, «Atti Accad. Naz. Lincei, Rend.», (6) 23, 313-316 (1936); A. TERRACINI, Densità di una corrispondenza di tipo dualistico ed estensione dell'invariante di Mehmke-Segre, «Atti Accad. Sci. Torino», 71, 310-328 (1935-36); Invariante di Mehmke-Segre generalizzato ed applicazione alle congruenze di rette, «Boll. U. M. I.», (1) 15, 109-113 (1936); B. SEGREGRE, Invarianti differenziali relativi alle trasformazioni puntuali e dualistiche fra due spazi euclidei, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 60, 224-232 (1936).

Per  $\gamma = -1$ , si hanno le corrispondenze polari; cfr. G. FUBINI-E. ČECH, Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces, Gauthier Villars, Paris (1931), p. 153. Cfr. pure A. TERRACINI, i due lavori cit.

per il riferimento duale  $a_0, a_1, a_2$  valgono le formule

$$da_i = - \sum_k^2 \omega_k a_k.$$

Nel seguito, in luogo di  $\omega_{01}$  ( $\omega_{02}$ ), scriveremo sempre  $\omega_1$  ( $\omega_2$ ).

Per ogni coppia  $A, a$  scegliamo un sistema di riferimento del tipo indicato nel num. prec.; si hanno le relazioni <sup>(8)</sup>

$$(3) \quad \omega_{10} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \omega_2 \quad \omega_{20} = \frac{1}{1 - \gamma} \omega_1.$$

Le direzioni unite in  $\Gamma$  sono  $\omega_1 = 0$  ed  $\omega_2 = 0$ . Le curve canoniche costituiscono ovviamente una rete (*rete canonica*) <sup>(9)</sup>.

Differenziamo esternamente le (3); in conseguenza del lemma di CARTAN, si ha che, dette  $\Psi_1, \Psi_2$  due forme quadratiche:

$$\begin{cases} \Psi_1(\omega_1, \omega_2) = \lambda_1 \omega_1^2 + 2\lambda \omega_1 \omega_2 + \lambda_2 \omega_2^2 \\ \Psi_2(\omega_1, \omega_2) = \mu_1 \omega_1^2 + 2\mu \omega_1 \omega_2 + \mu_2 \omega_2^2, \end{cases}$$

valgono le relazioni

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \omega_1} \\ \frac{d\gamma}{(\gamma - 1)^2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} (\omega_{22} + \omega_{11} - 2\omega_{00}) = \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \omega_2} \\ - \frac{d\gamma}{(\gamma - 1)^2} + \frac{1}{1 - \gamma} (\omega_{22} + \omega_{11} - 2\omega_{00}) = \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \omega_1} \\ \omega_{21} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \omega_2}. \end{array} \right.$$

<sup>(8)</sup> Qui e nel seguito si usano le identità (cfr. M. VILLA, *Problemi integrali sulle trasformazioni puntuali*, « Compositio Math. », 12, 137-146 (1954), nota <sup>(16)</sup>):

$$\begin{cases} dx = -\omega_1 + (\omega_{00} - \omega_{11})x - \omega_{21}y + \omega_{10}x^2 + \omega_{20}xy \\ dy = -\omega_2 - \omega_{12}x + (\omega_{00} - \omega_{22})y + \omega_{10}xy + \omega_{20}y^2 \end{cases}$$

e le duali, che si ricavano immediatamente:

$$\begin{cases} du = \omega_{10} + (\omega_{11} - \omega_{00})u + \omega_{12}v - \omega_1 u^2 - \omega_2 uv \\ dv = \omega_{20} + \omega_{21}u + (\omega_{22} - \omega_{00})v - \omega_1 uv - \omega_2 v^2. \end{cases}$$

<sup>(9)</sup> Ad es, se  $\mathcal{C}$  è una correlazione, la rete canonica è costituita dalle rette della conica-inviluppo d'incidenza; gl'inviluppi canonici sono i punti della conica-luogo d'incidenza.

Le direzioni caratteristiche sono date dall'equazione:

$$\begin{vmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ \omega_{10} & \omega_{20} \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$(5) \quad \lambda_1 \omega_1^3 + (2\lambda + \gamma \mu_1) \omega_1^2 \omega_2 + (\lambda_2 + 2\gamma \mu) \omega_1 \omega_2^2 + \gamma \mu_2 \omega_2^3 = 0.$$

Le curve canoniche  $\omega_1 = 0$  ( $\omega_2 = 0$ ) sono rette se e solo se  $\mu_2 = 0$  ( $\lambda_1 = 0$ ). D'altronde, come si rileva dalla (5), questa è pure la condizione affinché siano caratteristiche. Quindi *condizione necessaria e sufficiente affinché le curve canoniche siano caratteristiche è che siano rette*. Ritorniamo nel seguito sulle trasformazioni le cui curve canoniche godono di tale proprietà.

Differenziamo esternamente le (4); detti  $p_i, q_i$  dei coefficienti opportuni, si ha:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\lambda_1 - \frac{3}{2} \lambda_1 (\omega_{11} - \omega_{22}) = p_1 \omega_1 + q_1 \omega_2 \\ d\lambda - \frac{1}{2} \lambda (\omega_{11} - \omega_{22}) = p_2 \omega_1 + q_2 \omega_2 \\ d\lambda_2 + \frac{1}{2} \lambda_2 (\omega_{11} - \omega_{22}) = p_3 \omega_1 + q_3 \omega_2 \\ d\mu_1 - \frac{1}{2} \mu_1 (\omega_{11} - \omega_{22}) = p_4 \omega_1 + q_4 \omega_2 \\ d\mu + \frac{1}{2} \mu (\omega_{11} - \omega_{22}) = p_5 \omega_1 + q_5 \omega_2 \\ d\mu_2 + \frac{3}{2} \mu_2 (\omega_{11} - \omega_{22}) = p_6 \omega_1 + q_6 \omega_2 \end{array} \right.$$

con

$$\begin{aligned} q_1 - p_2 &= \frac{1}{2} (\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \mu + \lambda^2 - \lambda \mu_1) & q_2 - p_3 &= -\frac{3}{2} \lambda_2 \mu_1 + \frac{1}{2} \lambda \mu + \lambda \lambda_2 + 3 \frac{\gamma(\gamma+1)}{(\gamma-1)^2} \\ q_4 - p_5 &= \frac{3}{2} \mu_1 \lambda_2 - \frac{1}{2} \lambda \mu - \mu \mu_1 - 3 \frac{\gamma(\gamma+1)}{(\gamma-1)^2} & q_5 - p_6 &= \frac{1}{2} (-\mu_1 \mu_2 + \lambda \mu_2 - \mu^2 + \lambda_2 \mu). \end{aligned}$$

Dalle (6) si deduce che i sei coefficienti  $\lambda_1, \lambda, \lambda_2, \mu_1, \mu, \mu_2$  sono invarianti relativi; supponiamo per ora che almeno uno non sia identicamente nullo. In tal caso lo si può rendere uguale ad uno, ed il riferimento è così fissato. Se, per fissare le idee, è  $\lambda_2 \neq 0$ , si ha che, posto  $\lambda_2 = 1$ , gli 8 coefficienti  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, q_3, q_6$  costituiscono un sistema d'*invarianti fondamentali*; il sistema di PFAFF relativo a  $\mathcal{C}$  è costituito dalle (3), (4) e (6) normalizzate, e,

da queste, si deducono allora sei condizioni d'integrabilità nei predetti invarianti. Usufruendo delle identità citate in (5), si trova che gli sviluppi locali delle equazioni di  $\mathcal{C}$ , nel riferimento ora ora determinato, sono:

$$\begin{cases} u = \frac{\gamma}{1-\gamma} y + \frac{1}{2} \Psi_1(x, y) + [3] \\ v = \frac{1}{\gamma-1} x + \frac{1}{2} \Psi_2(x, y) + [3]. \end{cases}$$

L'intorno del 2° ordine di  $\mathcal{C}$  è quindi individuato dai coefficienti delle forme  $\Psi_1, \Psi_2$ . D'altra parte si verifica facilmente che se due trasformazioni sono tali che i cinque coefficienti predetti sono uguali, tali sono anche gli invarianti  $p_i, q_i$ . Se ne deduce che:

*Se due trasformazioni dualistiche di tipo generale si possono mettere in corrispondenza in modo che gli intorni del 2° ordine di coppie corrispondenti siano omografici <sup>(10)</sup>, esse sono omografiche.*

5. In questo numero studiamo le trasformazioni dualistiche che costituiscono una *deformazione proiettiva* per la loro rete canonica (tali trasformazioni sono quindi di tipo generale). Per quanto s'è visto nel num. prec., ciò accade se e solo se detta rete è costituita da rette. *Dal sistema di PFAFF costituito dalle (3), (4) e (6) normalizzate si deduce che le trasformazioni esaminate dipendono da quattro funzioni arbitrarie di una variabile.*

Sia  $r$  una retta canonica; essendo questa anche curva caratteristica, quando il punto  $A$  varia su di essa, la retta  $a$  corrispondente descrive un fascio, avente per centro un punto  $B$  di  $r$ . Al variare di  $r$  nella propria famiglia di curve canoniche,  $B$  descrive una curva  $\mathcal{C}_1$ ; analogamente si ha una curva  $\mathcal{C}_2$  in relazione all'altra famiglia della rete.

Per costruire una qualunque trasformazione di questo tipo, si consideri, nel piano, un'arbitraria rete di rette (per assegnare la quale occorrono due funzioni d'una variabile), ed un'arbitraria congruenza piana (cfr. FUBINI-ČECH, op. cit., n. 51) di fasci di rette, per assegnare la quale è sufficiente dare le curve  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  luogo dei centri dei fasci (occorre quindi dare due altre funzioni di una variabile). Se  $A$  è un punto generico del piano, ed  $r_1, r_2$  le due rette della rete passanti per  $A$ , siano  $B_1, B_2$  due intersezioni di  $r_1$  con  $\mathcal{C}_1$  e

<sup>(10)</sup> Questo significa che esiste, per due qualsiasi coppie corrispondenti, un'omografia che approssima la corrispondenza fino all'intorno del 2° ordine.

di  $r_2$  con  $\mathcal{C}_2$ , rispettivamente: la trasformazione dualistica che associa al punto  $A$  la retta  $B_1B_2$ , ha come curve canoniche le rette della rete considerata <sup>(11)</sup>. Per costruire il punto corrispondente ad una retta data, si procede in modo duale.

In questo tipo rientrano le trasformazioni per le quali tutti gl'invarianti relativi  $\lambda_1, \lambda, \lambda_2, \mu_1, \mu, \mu_2$  sono nulli. Per esse valgono le relazioni

$$\omega_{12} = 0; \quad d\gamma = 0; \quad 2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} = 0; \quad \omega_{21} = 0,$$

dalle quali si trae, per differenziazione esterna,  $\gamma = -1$ . Si tratta quindi di corrispondenze polari; inoltre, per la (5), sono a direzioni caratteristiche indeterminate, e quindi sono correlazioni. Se ne conclude quindi che esse sono le *polarità*.

6. Se la coppia  $A, a$  è parabolica, si assuma come retta  $x_1 = 0$  la retta  $a_1$  unita in  $\Gamma$ , e come retta  $x_1 = x_2$  la corrispondente della  $x_2 = 0$ . Le equazioni di  $\mathcal{T}$  sono allora

$$u = a_{11}x + a_{11}y + [2] \quad v = -a_{11}x + [2].$$

Le coniche (luogo) d'incidenza delle correlazioni tangenti formano un sistema lineare  $\infty^2$ , con punto base in  $(a, a_1)$  e tangente fissa ivi  $a$ .

La conica relativa alla correlazione principale si spezza in due rette che separano armonicamente  $a$  ed  $a_1$ ; scegliendo il punto unità su una di queste, si hanno per  $\mathcal{T}$  gli sviluppi:

$$(7) \quad u = -x - y + [2] \quad v = x + [2].$$

Sia  $\mathcal{T}$  una trasformazione dualistica per la quale la generica coppia di elementi corrispondenti sia parabolica, cioè, come si dirà brevemente, una *trasformazione parabolica*. Associando ad ogni coppia  $A, a$  un riferimento come sopra, si hanno le relazioni

$$\omega_{10} = \omega_1 + \omega_2 \quad \omega_{20} = -\omega_1.$$

<sup>(11)</sup> Le trasformazioni, per le quali un solo sistema di curve canoniche è costituito da rette, dipendono, com'è ovvio, da una *funzione arbitraria di due variabili*. Per costruire queste trasformazioni, si consideri una famiglia  $F$  di rette, e su ogni retta  $r$  di  $F$  un punto  $B$ . Si assegni poi un'arbitraria corrispondenza  $\Pi$  fra la punteggiata  $r$  ed il fascio  $B$  (per fissare  $\Pi$  occorre appunto una funzione di due variabili). Se ad un generico punto  $A$  si associa la retta  $a$ , corrispondente ad  $A$  nella corrispondenza  $\Pi$  relativa alla retta  $r$  passante per  $A$ , si ha una trasformazione dualistica del tipo considerato.

L'unica direzione unita è la  $\omega_1 = 0$ . Per differenziazione esterna si ha che, posto

$$\begin{cases} \Psi_1(\omega_1, \omega_2) = \lambda_1 \omega_1^2 + 2\lambda \omega_1 \omega_2 + \lambda_2 \omega_2^2 \\ \Psi_2(\omega_1, \omega_2) = \mu \omega_1^2, \end{cases}$$

valgono le

$$(8) \quad \begin{cases} \omega_{00} - \omega_{11} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \omega_1} \\ 2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{21} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial \omega_2} \\ -2\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{21} = \frac{\partial \Psi_2}{\partial \omega_1}. \end{cases}$$

L'equazione delle direzioni caratteristiche è

$$\begin{vmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ \omega_{10} & \omega_{20} \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$(\lambda_1 + \mu)\omega_1^3 + (2\lambda + \mu)\omega_1^2\omega_2 + \lambda_2\omega_2^2\omega_1 = 0.$$

Quindi le curve canoniche d'una trasformazione parabolica sono sempre caratteristiche: ciò si può esprimere anche dicendo che una trasformazione parabolica è sempre una deformazione proiettiva per le sue curve canoniche. Si constata che le curve canoniche sono rette se e solo se sono caratteristiche doppie (il che si ha per  $\lambda_2 = 0$ ).

Differenziando esternamente le (8) si ha:

$$(9) \quad \begin{cases} d\lambda_1 - \omega_{12}(\mu + 2\lambda) = p_1\omega_1 + q_1\omega_2 \\ d\lambda - \lambda_2\omega_{12} = p_2\omega_1 + q_2\omega_2 \\ d\lambda_2 = p_3\omega_1 + q_3\omega_2 \\ d\mu = p_4\omega_1 + (\mu^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda^2 - \lambda_2\mu + \lambda\mu + 3)\omega_2 \end{cases}$$

con

$$q_1 - p_2 = \mu\lambda_1 + \lambda^2 - \lambda\mu - \lambda\lambda_1 - 3, \quad q_2 - p_3 = 2\lambda\mu + \lambda\lambda_2 - 2\lambda_2\mu - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda^2 - 3.$$

Detto  $\delta$  un simbolo di differenziazione rispetto ai soli parametri secondari, si ha dalle (9)

$$\delta\lambda_1 = (\mu + 2\lambda)e_{12}, \quad \delta\lambda = \lambda_2e_{12}, \quad \delta\lambda_2 = \delta\mu = 0,$$

essendo  $e_{12} = \omega_{12}(\delta)$ . Si noti che  $\lambda_2$  e  $\mu$  sono invarianti assoluti; se  $\lambda_2 \neq 0$ , si può far sì che  $\lambda = 0$  ed il riferimento è fissato. Le trasformazioni paraboliche le cui curve canoniche non sono rette

dipendono quindi dal sistema di PFAFF:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{10} = \omega_1 + \omega_2 \quad \omega_{20} = -\omega_1 \\ \omega_{00} - \omega_{11} = \lambda_1 \omega_1 \quad \omega_{00} - \omega_{22} = -(\mu + \lambda_1) \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 \\ \omega_{21} = -\mu \omega_1 - \lambda_2 \omega_2 \quad \omega_{12} = -\frac{p_2}{\lambda_2} \omega_1 - \frac{q_2}{\lambda_2} \omega_2 \\ d\lambda_1 = \left(p_1 - \frac{\mu}{\lambda_2} p_2\right) \omega_1 + \left(p_2 - \frac{\mu}{\lambda_2} q_2 + \mu \lambda_1 - 3\right) \omega_2 \\ d\lambda_2 = (q_2 + 2\lambda_2 \mu + 2\lambda_1 \lambda_2 + 3) \omega_1 + q_3 \omega_2 \\ d\mu = p_4 \omega_1 + (\mu^2 - \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_2 \mu + 3) \omega_2 \end{array} \right.$$

In tale sistema di riferimento, gli sviluppi locali delle equazioni di  $\zeta$  sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = -x - y - \Psi_1(x, y) + [3] \\ v = x - \Psi_2(x, y) + [3]. \end{array} \right.$$

Ragionando come nel n. 4. si conclude che se due trasformazioni paraboliche le cui curve canoniche non sono rette hanno, coppia per coppia, gli intorni del 2° ordine omografici, esse sono omografiche. Inoltre, dalle condizioni d'integrabilità del sistema (10), si deduce che le trasformazioni in esame dipendono da una funzione arbitraria di due variabili, il che era direttamente prevedibile.

Se invece  $\lambda_2 = 0$ , la trasformazione ha per curve canoniche delle rette; avendosi

$$\delta \lambda_1 = (\mu + 2\lambda) e_{12} \quad \delta \lambda = \delta \mu = 0.$$

si possono distinguere due casi, secondo che  $\mu + 2\lambda$  è diverso da zero o è nullo. Le trasformazioni del primo tipo sono di 2ª specie<sup>(12)</sup>, e, posto  $\lambda_1 = 0$ , il riferimento è fissato. Il sistema di PFAFF che fornisce le trasformazioni in questione è:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{10} = \omega_1 + \omega_2 \quad \omega_{20} = -\omega_1 \\ \omega_{00} - \omega_{11} = \lambda \omega_2 \quad \omega_{00} - \omega_{22} = (\lambda - \mu) \omega_1 - \lambda \omega_2 \quad \omega_{21} = (-\mu - \lambda) \omega_1 \\ \omega_{12} = -\frac{p_1}{\mu + 2\lambda} \omega_1 - \frac{p_2 + \lambda^2 - \lambda \mu - 3}{\mu + 2\lambda} \omega_2 \\ d\lambda = p_2 \omega_1 + (2\lambda \mu + \lambda^2 - 3) \omega_2 \quad d\mu = p_4 \omega_1 + (\mu^2 + \lambda^2 + \lambda \mu + 3) \omega_2. \end{array} \right.$$

(12) Un'altra classe di trasformazioni dualistiche paraboliche di 2ª specie si ha per  $(2\lambda + \mu)^2 - 4\lambda_2(\lambda_1 + \mu) = 0$ ; esse rientrano nel tipo generale più sopra considerato, e si distinguono da quelle in esame in quanto le curve canoniche sono caratteristiche semplici, e non sono rette.

*La soluzione generale di tale sistema dipende da tre funzioni arbitrarie di una variabile.*

Scrivendo gli sviluppi in serie delle loro equazioni, si constata che due trasformazioni di questo tipo che abbiano, coppia per coppia, gli stessi interni del 3° ordine sono omografiche (mentre non lo sono necessariamente se hanno gli stessi interni del 2° ordine).

Se invece  $\lambda_2(2\lambda + \mu) = 0$ , la trasformazione parabolica è di 3ª specie (e viceversa). Dalle (9) si ha

$$p_4\omega_1 + (3\lambda^2 + 3)\omega_2 = d\mu = -2d\lambda = -2p_2\omega_1 + 2(3\lambda^2 + 3)\omega_2$$

e quindi

$$p_4 = -2p_2 \quad \lambda = \varepsilon \quad (\varepsilon^2 = -1)$$

da cui

$$p_2 = p_4 = 0$$

Rimane solo la relazione

$$d\lambda_1 = p_1\omega_1 - (3\varepsilon\lambda_1 + 6)\omega_2$$

dalla quale, per differenziazione, si trae

$$[dp_1 + (3\varepsilon\lambda_1 + 6)\omega_{12}\omega_1] + (15\lambda_1 + 3\varepsilon\lambda_1^2 - 18\varepsilon - 5\varepsilon p_1)[\omega_1\omega_2] = 0.$$

Si può quindi far sì che sia  $p_1 = 0$ , e quindi si ha:

$$\omega_{12} = k\omega_1 + (\lambda_1 - 3\varepsilon)\omega_2.$$

$k$  è l'unico invariante fondamentale: queste trasformazioni dipendono da una funzione arbitraria di una variabile. Esse sono individuate dall'interno del 4° ordine.

7. Sia ora  $A, a$  una coppia identica di elementi corrispondenti; assumendo l'origine in  $A$  e la retta  $x_3 = 0$  in  $a$ , si hanno per  $\mathcal{C}$  questi sviluppi in serie:

$$u = a_{12}y + [2] \quad v = -a_{12}x + [2].$$

Le coniche (luogo) d'incidenza  $\mathcal{C}$  delle correlazioni tangenti

$$(\lambda x_1 + \mu x_2 + x_3)x_3 = 0$$

si spezzano in  $a$  ed in un'altra retta del piano; le coniche (inviluppo) d'incidenza  $\mathcal{C}$

$$(-\mu u_1 + \lambda u_2 + a_{12}u_3)u_3 = 0$$

si spezzano nel fascio  $A$  ed in un altro fascio. Assunta ad arbitrio la retta  $x_2 = x_3$ , esiste una sola conica  $\mathcal{C}$  che la contiene; il relativo inviluppo  $\mathcal{C}$

$$(u_1 + a_{12}u_3)u_3 = 0$$

si spezza nei fasci di centro  $A$  ed  $M(1, 0, a_{12})$ . Assunta come retta  $x_1 = x_3$  un'arbitraria retta per  $M$ , si ha  $a_{12} = 1$ , e le equazioni di  $\mathcal{C}$  diventano:

$$\begin{cases} u = y + \alpha_{20}x^2 + 2\alpha_{11}xy + \alpha_{02}y^2 + [3] \\ v = -x + \beta_{20}x^2 + 2\alpha_{11}xy + \beta_{02}y^2 + [3]. \end{cases}$$

Dimostro che *non esistono trasformazioni dualistiche per le quali la generica coppia di elementi corrispondenti è identica*. Infatti, supposto che ve ne siano, si assuma, per ogni coppia, un sistema di riferimento del tipo più sopra precisato. Si ha:

$$\omega_{10} = -\omega_2 \quad \omega_{20} = \omega_1$$

dalle quali, per differenziazione esterna,

$$2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} = 0$$

e, differenziando questa, si ha

$$[\omega_1, \omega_2] = 0$$

il che è assurdo <sup>(13)</sup>.

Nel caso di una coppia identica non generica, se vi sono almeno due rette caratteristiche distinte per  $A$ , si assumano come rette  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ; si ha  $\alpha_{20} = \beta_{02} = 0$ . La proiettività caratteristica fra la punteggiata  $x_2 = 0$  ed il fascio di centro  $(1, 0, 0)$  è

$$v = -\frac{x}{1 + \beta_{20}x}.$$

Se la corrispondente del punto  $(1, 0, 0)$  non è la retta  $a_2$ , la assumo come retta  $x_2 = x_3$ ; si ha  $\beta_{20} = 1$ , ed il riferimento è fissato.

8. Nel presente numero si risolvono i seguenti problemi:

1) data nel piano un'arbitraria rete di curve, trovare (se esistono e) quante sono le trasformazioni dualistiche per le quali la rete data è canonica;

<sup>(13)</sup> La proprietà dimostrata si può giustificare anche così: se  $\mathcal{C}$  è una trasformazione del tipo detto, una qualunque retta  $r$  del piano è curva canonica per  $\mathcal{C}$ , e quindi l'inviluppo corrispondente è un fascio. Quindi  $r$  è curva caratteristica, e  $\mathcal{C}$  si riduce ad una correlazione, che risulta però degenerare, per l'ipotesi fatta.

2) data nel piano un'arbitraria famiglia di curve, trovare (se esistono e) quante sono le trasformazioni dualistiche paraboliche per le quali le curve della famiglia sono canoniche.

In entrambi i casi, si trova che le trasformazioni richieste esistono e dipendono, qualunque sia la rete (o la famiglia), da due funzioni arbitrarie di una variabile.

È noto che una rete si rappresenta assegnando le coordinate omogenee  $x$  di un punto del piano in funzione di due parametri:  $x = x(t_1, t_2)$ ; le curve della rete si hanno per  $t_1 = \text{cost.}$  e per  $t_2 = \text{cost.}$  Posto  $x^{(1)} = \frac{\partial x}{\partial t_1}$  e analoghe, sia

$$(12) \quad \begin{cases} x^{(11)} = \alpha x^{(1)} + \beta x^{(2)} + px \\ x^{(12)} = ax^{(1)} + bx^{(2)} + cx \\ x^{(22)} = \gamma x^{(1)} + \delta x^{(2)} + qx \end{cases}$$

il sistema di equazioni differenziali del quale le  $x$  sono integrali.

Consideriamo la trasformazione dualistica  $\mathcal{T}$  che associa al punto  $x$  la retta  $\xi(lx + x^{(1)}, mx + x^{(2)})$ , dove  $l, m$  sono funzioni di  $t_1, t_2$ . Due direzioni  $(dt_1, dt_2)$ ,  $(\Delta t_1, \Delta t_2)$  per  $x$  sono coniugate in  $\Gamma$  (cfr. n. 2) se le rette  $(x, dx)$ ,  $\xi, \xi + \Delta \xi$  formano fascio. Tenendo conto delle (12), a meno d'infinitesimi d'ordine superiore si ha:

$$\begin{aligned} \Delta \xi = & | (l^{(1)} + p)x + (l + \alpha)x^{(1)} + \beta x^{(2)} \quad mx + x^{(2)} | + \\ & + | lx + x^{(1)} \quad (m^{(1)} + c)x + (m + a)x^{(1)} + bx^{(2)} | \Delta t_1 + \\ & + | (l^{(2)} + c)x + ax^{(1)} + (l + b)x^{(2)} \quad mx + x^{(2)} | + \\ & + | lx + x^{(1)} \quad (m^{(2)} + q)x + \gamma x^{(1)} + (m + \delta)x^{(2)} | \Delta t_2. \end{aligned}$$

Si esprima ora la condizione richiesta, considerando i coefficienti di  $|x \ x^{(1)}|$ ,  $|x \ x^{(2)}|$ ,  $|x^{(1)} \ x^{(2)}|$  come coordinate plückeriane omogenee:

$$\begin{vmatrix} dt_1 & dt_2 & 0 \\ -m & l & 1 \\ (-m^{(1)} - c + al - \alpha m)\Delta t_1 + (l^{(1)} + p - \beta m + bl)\Delta t_1 + (l + \alpha + b)\Delta t_1 + \\ + (-m^{(2)} + \gamma l - \alpha m - q)\Delta t_2 & + (l^{(2)} + c - \beta m + \delta l)\Delta t_2 & + (a + m + \delta)\Delta t_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Si ha così l'equazione di  $\Gamma$ :

$$(13) \quad \begin{aligned} & (l^{(1)} - l^2 - \alpha l - \beta m + p)dt_1\Delta t_1 + (l^{(2)} - lm - \alpha l - \beta m + c)dt_1\Delta t_2 + \\ & + (m^{(1)} - lm - \alpha l - \beta m + c)dt_2\Delta t_1 + (m^{(2)} - m^2 - \gamma l - \delta m + q)dt_2\Delta t_2 = 0. \end{aligned}$$

1) La rete assegnata è canonica per  $\mathcal{C}$  se le direzioni unite sono  $dt_1 = 0$ ,  $dt_2 = 0$ , cioè se

$$(14) \quad \begin{cases} l^{(1)} = l^2 + \alpha l + \beta m - p \\ m^{(2)} = m^2 + \gamma m + \delta l - q. \end{cases}$$

Si constata senza difficoltà che la soluzione generale di questo sistema dipende sempre da due funzioni arbitrarie d'una variabile; non si hanno mai soluzioni singolari, e le caratteristiche sono date dalle curve canoniche <sup>(14)</sup>.

2) Per quanto riguarda il problema 2), le curve della famiglia assegnata corrispondano a  $t_1 = \text{cost.}$ : esse sono curve canoniche doppie se

$$(15) \quad \begin{cases} m^{(2)} = m^2 + \delta l + \gamma m - q \\ l^{(2)} + m^{(1)} = 2lm + 2\alpha l + 2\beta m - 2c. \end{cases}$$

Per questo sistema valgono tutte le considerazioni relative al caso 1).

9. Terminiamo indicando come si possa rappresentare analiticamente una trasformazione parabolica per la quale le curve canoniche sono rette (cfr. n. 6). Accanto al sistema di rette, rappresentabile con l'equazione  $y = t_1 x + f(t_1)$ , consideriamo le rette  $x = t_2$ ; si ottiene così una rete, le cui equazioni differenziali sono

$$x^{(11)} = \frac{f^{(11)}}{f^{(1)} + t_2} x^{(1)}; \quad x^{(12)} = \frac{x^{(1)}}{f^{(1)} + t_2}; \quad x^{(22)} = 0$$

ed il sistema (15) si scrive

$$m^{(2)} = m^2 \quad m^{(1)} + l^{(2)} = 2lm + \frac{2l}{f^{(1)} + t_2}.$$

Questo sistema si integra senza difficoltà; il suo integrale generale è:

$$m = \frac{1}{g(t_1) - t_2} \quad l = \left[ k(t_1) - \frac{g^{(1)}(t_1)}{f^{(1)} + t_2} \right] \left( \frac{f^{(1)} + t_2}{g(t_1) - t_2} \right)^2$$

( $g$ ,  $k$  funzioni arbitrarie di  $t_1$ ). La trasformazione cercata è quella che associa al punto corrispondente ai valori  $t_1$ ,  $t_2$  dei parametri la retta di equazione

$$Y = \left[ t_1 + \frac{t_2 - g}{k(f^{(1)} + t_2) - g^{(1)}} \right] X + f - g \frac{t_2 - g}{k(f^{(1)} + t_2) - g^{(1)}}.$$

<sup>(14)</sup> Cfr. E. CARTAN, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Hermann, Paris (1945). pp. 75, 82 e 98.