
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Recensioni.

- * Corrado Segre, Opere, Cremonese, Roma, 1957 (Alessandro Terracini)
- * G. Sansone, R. Conti, Equazioni differenziali non lineari, Monografie Matematiche del Consiglio delle Ricerche, Roma, 1957 (Guido Stampacchia)
- * B. Segre, "Proprietà locali e globali di varietà e di trasformazioni differenziali con speciale riguardo ai casi analitici e algebrici", Centro Intern. Matem. Estivo, Pavia, 1955 (Carmelo Luongo)
- * A. Maros Dell'Oro, La Teoria Fisica, C.E.D.A.M., Padova, 1955 (Alberto Pasquinelli)
- * F. Hirzebruch, Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Springer-Verlag, 1956 (Edoardo Vesentini)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 12
(1957), n.2, p. 316-330.

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_2_316_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_2_316_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

RECENSIONI

CORRADO SEGRE, *Opere*, a cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche, volume I. Edizioni Cremonese, Roma 1957, pp. 12+445 L. 4000.

La pubblicazione delle *Opere* di Corrado Segre da parte dell'U.M.I. fu deliberata, nell'adunanza del 2 ottobre 1954, dalla Commissione scientifica, alla quale il prof. Togliatti aveva presentata una elaborata relazione preliminare. Secondo il piano previsto dall'U.M.I., dovrebbero uscire complessivamente quattro volumi, nei quali le Note e Memorie del Maestro verranno ripartite per materie, seguendosi poi entro ciascun gruppo l'ordine cronologico, analogamente al criterio già seguito per le *Opere* del Bianchi.

Il volume I, testè uscito, e del quale ci accingiamo a riferire contiene — preceduti da una bella Introduzione scritta da Severi — i lavori che nel loro complesso possono essere indicati come appartenenti alla Geometria algebrica; il volume II, in preparazione, conterrà quelli sulla geometria differenziale e sugli enti iperalgebrici; laddove è prevista la pubblicazione di altri due volumi, nei quali saranno pubblicate le ricerche di geometria proiettiva (o in particolare metrica), a partire dalla dissertazione di laurea sulle iperquadriche di uno S_n proiettivo e sulle applicazioni alla geometria della retta.

Una ripartizione dei lavori per materie, pur necessaria quando — come nel caso di Corrado Segre — un ordinamento complessivo puramente cronologico ne offrirebbe altri, non è a sua volta scevra di inconvenienti, soprattutto per le incertezze che possono sorgere sull'attribuzione di singoli lavori all'uno o all'altro gruppo. Per quanto riguarda Corrado Segre, interviene inoltre la circostanza, che, essendo egli assunto alle proprietà invarianti per trasformazioni birazionali a partire da considerazioni di geometria proiettiva — e qui basti ricordare il metodo iperspaziale per la geometria su una curva algebrica — il distacco delle ricerche nell'indirizzo birazionale da quelle, proiettive, che ne costituiscono in lui il presupposto poteva apparire meno indicato. A questo pericolo è stato ovviato includendo nel gruppo dei lavori pubblicati nel volume I alcuni che, pur dovendosi attribuire al gruppo proiettivo, hanno condotto Segre alle proprietà invarianti per trasformazioni birazionali, e altri che, pur appartenendo insieme all'uno e all'altro indirizzo, particolarmente al secondo devono la loro importanza. Precisamente, i lavori pubblicati nel volume I sono i seguenti:

- I. - Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque.
- II. - Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani.
- III. - Remarques sur les transformations uniformes des courbes elliptiques en elles-mêmes.
- IV. - Ricerche sulle rigate ellittiche di ordine qualunque.
- V. - Nuovi risultati sulle rigate algebriche di genere qualunque.
- VI. - Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques.
- VII. - Sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere p .

- VIII. - Intorno alla geometria su una rigata algebrica.
 IX. - Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazi.
 X. - Sulle curve normali di genere p dei vari spazi.
 XI. - Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques. II Partie. Surfaces réglées algébriques.
 XII. - Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche.
 XIII. - Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi.
 XIV. - Intorno alla storia del principio di corrispondenza e dei sistemi di curve.
 XV. - Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito.
 XVI. - Sulla forma Hessiana.
 XVII. - Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche.
 XVIII. - Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche.
 XIX. - Le molteplicità nelle intersezioni delle curve piane algebriche con alcune applicazioni ai principi della teoria di tali curve.
 XX. - Intorno ai punti di Weierstrass di una curva algebrica.
 XXI. - Un'osservazione relativa alla riducibilità delle trasformazioni cremoniane e dei sistemi lineari di curve piane per mezzo di trasformazioni quadratiche.

Il volume, come si vede, si apre con la Nota I sulle superficie razionali normali, che apporta complementi essenziali ad un argomento già studiato dal Veronese nella sua *Behandlung der projectivischen Verhältnisse*...: vi si trova la classificazione di quelle rigate in base all'ordine delle direttrici minime, e — per i vari casi — la rappresentazione piana (che, passando alle superficie proiezioni nello spazio ordinario, offre la conferma dei risultati per queste ottenuti da Clebsch). Siamo dunque sostanzialmente nell'indirizzo proiettivo, mentre d'altra parte questa Nota prelude alle successive generalizzazioni alcune delle quali condurranno Segre alla geometria sull'ente algebrico semplicemente infinito. Tali successive generalizzazioni concernono in un primo tempo le $S_2 - V_3$ razionali normali (Nota II) e le rigate ellittiche (Nota IV), la quale ultima contiene più visibilmente della I il germe delle successive ricerche di Segre sulle rigate algebriche in generale. E' poi da rilevare che anche nella Nota III, intitolata alle trasformazioni birazionali di una curva ellittica in sè (argomento che verrà poi ripreso nella XII, nella quale una parte notevole è fatta alle corrispondenze singolari esistenti sulle curve armoniche o equianarmoniche) le rigate razionali o ellittiche hanno una parte importante, attraverso la rigata delle congiungenti le coppie di punti omologhi nella corrispondenza considerata—secondo un procedimento che Segre applicherà spesso anche in seguito.

La serie delle Note (V, VI, VIII, XI) sulle rigate algebriche di genere qualunque è particolarmente importante per il modo in cui riflette l'evolversi del pensiero di Segre, è importante per i risultati ottenuti sulle rigate, e per lo studio — strettamente connesso — delle curve algebriche, (e alle curve algebriche fanno espresso riferimento i titoli delle VI, XI, due parti di una stessa Memoria che è la più voluminosa di questo gruppo). Segre da principio trova proprietà delle curve algebriche iperspaziali, considerandole come trasformate birazionali di curve piane, seguendo il procedimento che Brill e Noether, e poi Noether, avevano applicato nello spazio ordinario, e — in parte — Veronese negli iperspazi. In tal modo Segre utilizza i risultati sulle serie lineari che già erano stati ottenuti con procedimenti algebrici o trascendenti, per applicarli alla geometria proiettiva delle curve iperspaziali; laddove in seguito egli preferirà seguire il cammino inverso, per ricostruire sinteticamente la teoria delle serie lineari. Ma già qui Segre

abbandona il cammino accennato per servirsi di un «metodo fecondo» che consiste (analogamente a quanto già si è ricordato in casi particolari) nel associare ad una corrispondenza tra due curve algebriche la rigata delle congiungenti coppie di punti omologhi. Il metodo non è nuovo (e, come ricorda lo stesso Segre nella Memoria VI, Cremona lo aveva applicato per dimostrare l'invarianza del genere); ma nelle mani di Segre esso acquista un campo di applicazione assai esteso, e lo conduce per esempio — attraverso alla considerazione di condizioni che permettono di precisare il carattere proiettivo di certe corrispondenze tra curve — a risultati generali sulle curve di cui una curva data è proiezione; mediante considerazioni di tale natura — e altre analoghe sugli S_{k-1} congiungenti i punti dei singoli gruppi di una g^1_k — Segre approfondisce lo studio delle curve iperellittiche, e più in generale di quelle che contengono una g^1_k .

Però, in questo gruppo di lavori, si direbbe che quello che costituisce principalmente l'interesse di Segre è ancora il problema delle rigate algebriche (e più generalmente delle $S_{k-1} - V_k$ algebriche), e quali di esse siano normali e quali no; e — accanto a ciò — una formula che lega ordine e genere di una rigata coll'ordine e genere di una curva tracciata su di essa (Nota VIII), insieme con la sua estensione alle $S_{k-1} - V_k$ (Nota IX).

Ma ormai il pensiero di Segre andava evolvendo verso uno scopo ben determinato. Leggiamo le parole scritte da lui stesso nella premessa alla sua celebre «*Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*» (XV): «... Nel fare», egli scrive, «son già vari anni, delle ricerche sulle rigate algebriche, e in generale sulle varietà composte da ∞^1 spazi, avendo io avuto bisogno di valermi delle proprietà delle serie lineari studiate nella Memoria Brill Noether, mi accorsi come «ricorrendo invece alle rigate ed alle dette varietà di spazi, e rappresentando quelle serie lineari mediante curve iperspaziali nel senso già accennato, si potessero ritrovare (almeno in parte) quelle proprietà mediante «semplici ragionamenti geometrici, evitando i calcoli algebrici o le considerazioni funzionali che occorrono per stabilire il teorema del Noether fondamentale per quella Memoria. Così dalla considerazione di due curve «in corrispondenza univoca (immagini di due serie lineari di uno stesso «ente algebrico) e della rigata delle congiungenti i loro punti omologhi, «giungevo a qualche caso particolare del *Restsatz* di Brill e Noether, vale «a dire dei teoremi sulle serie complete, residue, ecc. E poi da una formula fondamentale relativa ad una varietà composta di ∞^1 spazi e ad una «curva segnata su essa ottenevo qualche proposizione che si collega al «teorema Riemann-Roch, come il teorema di Clifford, ecc. Poco dopo il «mio amico sig. Castelnuovo, entrando più di proposito nell'argomento, «esponneva in modo assai più completo e sistematico una trattazione geometrica delle serie lineari sopra una curva algebrica». A chiarimento di ciò, aggiungiamo che la dimostrazione del teorema di Clifford era stata data da Segre in una lettera a Bertini, e forma l'oggetto della Nota X.

La citata «*Introduzione*», come è ben noto, è il risultato di un corso di Geometria superiore tenuto da Segre nel 1890-91, e fu pubblicata nel vol. XXII della seconda serie degli *Annali di matematica* insieme con la Memoria di Bertini: «*La geometria delle serie lineari sopra una curva secondo il metodo algebrico*»: si tratta di due esposizioni, condotte con metodi diversi, su uno stesso tema.

Limitandoci qui a quanto riguarda Segre, la sua «*Introduzione*» ha costituito, si può ben dire, la prima codificazione della geometria su una curva algebrica secondo il metodo geometrico. Si può affermare che la sua importanza è veramente eccezionale (e la sua ripubblicazione basterebbe da sola a giustificare ampiamente tutto il volume, anche qualora non vi fossero in esso tante cose importanti, come vi sono!): essa ha fissati i fondamenti di quella teoria, e ha costituito come una base e un punto di riferimento per gli sviluppi successivi della geometria algebrica, anche se

rispondenti ad altre vedute, e al di là di quelli che erano allora gli scopi di Corrado Segre.

Naturalmente, non è necessario osservare che l'avere Segre bandito dalla sua trattazione ogni procedimento fondato su calcoli algebrici — ove si prescinda dal principio di corrispondenza su una curva razionale — (il che tra altro implicava la rinuncia al teorema $Af + B\phi$ così fruttifero nella trattazione algebrica) trova la sua giustificazione non già in un meschino e vieto esclusivismo, ma nel desiderio di affinare un metodo per dargli la massima portata, nell'aspirazione di far progredire allo stesso tempo sia i risultati sia i metodi. Lo stesso Segre, dopo aver rilevato che in quel suo corso egli aveva esposti anche gli indirizzi di Brill e Noether e di Riemann, aggiunge: «L'argomento... e tale che non è ben trattato se non si sviluppa «sotto più aspetti. Ond'è che l'aver io qui preso ad esporlo dal punto «di vista geometrico non va interpretato nel senso di una preferenza che «a mio avviso si debba dare a questo metodo rispetto agli altri. Tutti meritano di essere studiati; ognuno ha i suoi pregi speciali; per ciascuno «vi sono questioni, in cui esso va più in là, od almeno riesce più luminoso «degli altri».

Ne l'«*Introduzione*» si limita alla geometria su una curva algebrica: per dirlo con le parole di Severi «... l'occasione è pel grande Maestro propizia per precisare, nello spirito del metodo, taluni concetti fondamentali, «come quelli di varietà algebrica e di corrispondenza algebrica fra due «varietà. E' qui che una tal corrispondenza viene considerata quale una «varietà algebrica contenuta nella varietà delle coppie ordinate di elementi (o punti) delle due date. Definizione di somma importanza».

Alla geometria su una curva algebrica si riferisce di nuovo la breve Nota XX, posteriore di qualche anno, relativa ai punti di Weierstrass (punti p -li della serie canonica), Nota nella quale Segre migliora una disuguaglianza di Hurwitz relativa al numero di tali punti che sono tra loro distinti.

Sebbene, a partire da quegli anni, la geometria sopra una superficie sia stata studiata nel modo più brillante da geometri italiani alcuni dei quali erano allievi di Segre, questi — come è noto — non prese quasi parte attiva al nuovo movimento. Egli ci ha però lasciata una nuova deduzione di quell'invariante relativo che porta il nome di Zeuthen-Segre, al quale giunge nella Nota XVII (avente essa pure origine in un corso di Geometria superiore, tenuto nel 1893-94), estendendo alle superficie algebriche la definizione del genere di una curva fondata sul numero dei punti doppi di una sua serie lineare semplicemente infinita, in base al numero δ dei punti doppi e a quello, σ , dei punti base di un fascio di curve di genere p esistenti sulla superficie, in quanto l'espressione $I = \delta - \sigma - 4p$ fornisce appunto l'invariante in questione (che per un fascio di sezioni piane si riduce a quello che Zeuthen aveva già considerato, rilevandone il carattere invariante). Nella stessa Nota di Segre si trova anche il modo di estendere quell'invariante alle varietà.

Per quanto, prescindendo dalla Nota precedente, Segre — come si è detto — non abbia partecipato attivamente alle ricerche di geometria su una superficie algebrica, è molto importante la Memoria XVIII, dedicata ad un argomento in certo senso preliminare. Si tratta essenzialmente della composizione dei punti singolari delle superficie algebriche mediante punti multipli, o linee, infinitamente vicini, a norma di idee che risalgono a Noether, sviluppate qua (mediante il ricorso a trasformazioni quadratiche) in modo concreto e sistematico, e con abbondanza di esempi e di casi particolari, in ispecie per quanto riguarda i punti doppi con singolarità infinitamente vicine. Anche l'abbassamento di classe sia della superficie, sia dei conici circoscritti, è studiato minutamente. Ed è anche affrontato il problema della trasformazione di una superficie in un'altra dotata di singolarità ordinarie, nel quale Segre, pur senza giungere a risultati definitivi, ha indicate vie possibili, ed ha analizzate le difficoltà che esse presentano.

Nella produzione di Segre, alla Memoria XVIII hanno fatto seguito due brevi Note pubblicate nel vol. 32 degli Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, nelle quali si criticavano procedimenti e risultati di Del Pezzo: con ragione quelle Note non sono state riprodotte, dato che esse rivestivano carattere polemico, senza aggiungere nulla di essenziale alla Memoria precedente.

In tema di punti singolari — ma qua si tratta di curve piane — troviamo in questo volume anche la Nota XXI, con la nota obbiezione formulata da Segre contro la dimostrazione di Noether — la sola che allora si conoscesse — circa la possibilità di scomporre ogni trasformazione cremoniana piana in un prodotto di trasformazioni quadratiche. Dopo i dubbi sollevati dal lavoro di Segre, vennero presto altre dimostrazioni, al sicuro da ogni obbiezione, però, di quella Nota restano egualmente osservazioni fini sulle molteplicità infinitamente vicine.

Ancora sui punti multipli delle curve algebriche piane, ma da un altro punto di vista, troviamo poi anche la Memoria XIX (ancora una Memoria avente origini didattiche), dove con mezzi algebrici elementari Segre ha studiate le molteplicità d'intersezione, ricorrendo sistematicamente al risultante.

Tra gli altri lavori, devono essere menzionati in particolare la Nota VII, nella quale appare per la prima volta — per un sistema lineare di curve piane — quella che si chiamerà poi la serie caratteristica, la XIII, dove è introdotta la varietà rappresentativa delle k^{nle} di punti variabili, uno per ciascuno, in k spazi lineari (è la varietà «prodotto» di questi spazi, oggi denominata appunto *varietà di Segre*); e la XIV, di carattere storico.

Insomma, la parte fondamentale che Segre ha avuto negli studi geometrici, a partire quasi dal momento del sorgere e dell'affermarsi della geometria proiettiva iperspaziale, nella loro evoluzione verso la geometria sull'ente algebrico, esce in modo mirabile da questo volume. L'importanza del quale non si può però ridurre alla storia delle idee. Lo spirito geometrico che tutto lo pervade (scrive Severi: «per Veronese, per Segre, per Bertini, «per tutti i nostri Maestri insomma di geometria iperspaziale, punti, rette «piani di un S_n , lineare, sono vere entità geometriche e non meri attributi «di entità analitiche. Lo spazio lineare ad n dimensioni per loro è come se «realmente esistesse: non ridotto cioè alle ombre di una banale finzione del «linguaggio»), la finezza e l'accuratezza del ragionamento fanno rivivere il grande Maestro per chi ebbe la ventura di conoscerlo, ed è da augurarsi che continuino ad esercitare verso i più giovani che si accingeranno a studiare queste *Opere* l'influsso sommamente benefico del suo insegnamento.

Ottima la stampa del volume (al quale, molto opportunamente, è aggiunto un indice degli Autori citati), grande la cura con cui è stato preparato, nè poteva essere diversamente nelle mani di Togliatti; chi scrive non ha potuto rilevare nessun errore di stampa⁽¹⁾.

ALESSANDRO TERRACINI

(1) La discordanza fra il numero delle pagine indicato nel presente volume per i lavori di C. Segre pubblicati negli Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, e quello indicato nell'elenco dei lavori di Segre in A. TERRACINI: *Corrado Segre (1863-1924)*, Jahresbericht der Deutsch. Math. Ver., Band 35, 1926, pp. 209-250, si deve al fatto che l'uno si riferisce alla numerazione dei volumi degli Atti per la sola classe di Scienze, e l'altro alle classi riunite.

G. SANSONE e R. CONTI, *Equazioni differenziali non lineari*, Monografie Matematiche del Consiglio Nazionale delle Ricerche (Roma 1957 XIX 647).

È ben nota ed apprezzata la figura di trattatista di G. Sansone, mentre la sua precedente opera sulle equazioni differenziali nel campo reale sta per essere pubblicata in diverse traduzioni all'estero, questi, valendosi ora della preziosa collaborazione di R. Conti, esperto ricercatore e suo allievo, ha dato alle stampe una nuova opera: «Equazioni differenziali non lineari» edito nella collana di Monografie Matematiche a cura del Consiglio nazionale delle ricerche.

Da quando B. van der Pol, nel 1920, con «A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations» ha suscitato l'interesse — anche dal punto di vista applicativo — per lo studio del comportamento degli integrali delle equazioni differenziali non lineari, numerose ricerche sono state dedicate a questo argomento dando origine alla cosiddetta meccanica non lineare. Le precedenti ricerche di Birkhoff e di Bendixson e quelle di Liapunov sulla stabilità del movimento sono state riprese ed approfondite da molti autori di diverse scuole. Nuovi metodi d'indagine, fondati sui procedimenti dell'Analisi funzionale, sono stati sviluppati negli ultimi anni ed hanno dato luogo a svariati risultati.

Questo ampio materiale di ricerche riceve ora una esposizione sistematica nella nuova monografia in questione, la quale si inserisce nella scarsa letteratura sull'argomento con una spiccata caratteristica di completezza e di attualità. L'esposizione infatti indica tutte le tappe che via via si sono percorse per giungere ai risultati più recenti e, assumendo in alcuni capitoli l'aspetto di trattato, rende utile la consultazione di quest'opera in questioni anche non strettamente legate a quella della meccanica non lineare. Per quanto riguarda più propriamente i risultati relativi alla meccanica non lineare (cfr. Cap. VI e Cap. VII), l'assidua cura posta dagli Autori nel raccogliere ed inquadrare una grande mole di risultati, in massima parte frammentari, rende quest'opera pregevole e contribuirà certamente a rendere ancora più rapida l'evoluzione della teoria stessa.

Di tutti gli argomenti trattati sono purtroppo costretto a dare solo rapidi cenni i quali però saranno già sufficienti a dare un'idea dell'interesse dell'opera.

La monografia dedica opportunamente il primo capitolo ad una sintetica ed efficace esposizione dei risultati di carattere generale relativi ai sistemi di equazioni differenziali di tipo normale nel campo reale. Trovano quindi posto in questo capitolo alcuni teoremi relativi all'intervallo di definizione delle soluzioni e alla limitatezza delle curve integrali, il lemma di Gronwall generalizzato, lo studio della dipendenza delle curve integrali dalle condizioni iniziali e nel caso dei sistemi lineari ne è data l'espressione esplicita. Già in questo capitolo si trovano le prime definizioni relative alle nozioni che verranno approfondite nel seguito, come quella di soluzioni stabili e di soluzioni periodiche. Vengono poi presi in considerazione i sistemi autonomi fissando le nozioni di caratteristiche, di spazio delle fasi, di punti singolari e di cicli. Questi sistemi autonomi, limitatamente al caso piano, sono studiati a fondo nei cinque capitoli successivi.

Il capitolo II è dedicato allo studio, estremamente particolareggiato, dei punti singolari isolati e alla loro classificazione sia per i sistemi autonomi lineari che per i sistemi omogenei; sono presi in esame anche i punti singolari all'infinito mediante la rappresentazione del piano delle fasi sulla sfera di Poincaré.

Il comportamento degli integrali delle equazioni differenziali del primo ordine nell'intorno dei punti singolari è l'argomento del terzo capitolo. Questo

comportamento è analizzato dapprima nel campo analitico sulla base del teorema di Briot-Bouquet e successivamente nel campo reale sulla base dei teoremi di Bendixson e di Wintner.

Nel capitolo IV, utilizzando i risultati particolari dei due capitoli precedenti, viene condotto uno studio generale dell'andamento delle caratteristiche di un sistema piano supponendo che i secondi membri siano funzioni reali e continue in tutto il piano e tali da assicurare l'unicità delle curve integrali e la loro dipendenza continua dei valori iniziali in ogni intervallo limitato della variabile indipendente (tempo). Trovano qui posto i classici risultati di Bendixson sulle curve definite dalle equazioni differenziali e di Birkhoff sui movimenti dei sistemi dinamici con le ulteriori generalizzazioni dovute a diversi autori. È notevole il grado di chiarezza che gli Autori della monografia sono riusciti a dare nella esposizione dei risultati di questo capitolo senza lederne la generalità. Il capitolo termina con la nozione di indice e con alcune rappresentazioni notevoli dello spazio delle fasi.

Il capitolo V è dedicato allo studio dei sistemi piani autonomi perturbati. È studiata dapprima la variazione locale nell'intorno di un punto singolare isolato allo scopo di precisare il più possibile entro quali limiti sia lecito affermare che una singolarità isolata di un dato sistema offre una configurazione analoga a quella del sistema ridotto. È considerato poi un caso nel quale il confronto con il sistema ridotto non può offrire alcuna indicazione. Infine viene studiata la variazione globale dell'insieme delle caratteristiche nel piano delle fasi, in relazione ad una perturbazione dei secondi membri del sistema.

I capitoli VI e VII sono dedicati allo studio delle più significative equazioni differenziali del secondo ordine interessanti le scienze applicate. Nel primo dei due capitoli sono trattate quelle equazioni che si possono ridurre a sistemi autonomi piani. La prima equazione presa in esame interviene nello studio dei fenomeni transitori relativi all'avviamento dei motori sincroni studiata soprattutto da Tricomi e da Amerio. Viene poi studiata la classica equazione di van der Pol già ricordata all'inizio di questa recensione e quella più generale di Liénard, all'analisi della quale ha portato notevoli contributi lo stesso Sansone. Sono poi esposti i risultati di Filippov e Conti e quelli di Levinson relativi all'equazione di Liénard generalizzata. La rimanente parte del capitolo è dedicata ad un'equazione del secondo ordine delle vibrazioni smorzate ed a un'equazione della dinamica ed aero dinamica dei fili proposta da Krall e studiata da Cecconi.

Quelle equazioni differenziali del secondo ordine interessanti le scienze applicate e dipendenti esplicitamente dal tempo e che non possono pertanto ridursi a sistemi autonomi piani sono invece presi in esame nel capitolo VII.

Dei sistemi non autonomi piani sono approfonditi i problemi della limitatezza delle soluzioni e dell'esistenza di soluzioni periodiche attraverso i teoremi di Yoshizawa e quelli di Brouwer, Cartwright Littlewood e di Maserà. Come applicazione di questi teoremi a casi concreti sono esposti alcuni risultati di John, di Levinson, di Graffi etc.. Sono poi presi in considerazione i teoremi di Caccioppoli e Ghizzetti che hanno costituita la prima applicazione dei metodi dell'Analisi funzionale allo studio di problemi della meccanica non lineare. E poi ripresa, in un caso più generale, l'equazione della meccanica dei fili già studiata nel capitolo precedente per esporre i risultati in proposito di Stoppelli che costituiscono una interessante applicazione dei metodi topologici di Leray-Schauder.

Questi due capitoli di cui abbiamo ora parlato rappresentano una interessante raccolta dei risultati più recenti relativi ai problemi della meccanica non lineare e forniranno un prezioso materiale per il progresso di questa teoria.

I due successivi capitoli si riferiscono come il primo, allo studio dei sistemi di equazione di ordine n . Nel capitolo VIII si trovano esposti alcuni risultati relativi alla teoria dei sistemi lineari; prendendo in considerazione dapprima i sistemi con coefficienti costanti, quelli con coefficienti

periodici e poi i sistemi riducibili, vengono via via introdotte le nozioni di esponenti caratteristici, di numeri d'ordine e di t -similitudine fra due matrici. La considerazione di sistemi regolari e lo studio della ricerca delle soluzioni periodiche dei sistemi lineari omogenei e non omogenei chiude il capitolo.

Nel nono ed ultimo capitolo della monografia è sviluppata esaurientemente con dimostrazioni nuove rispetto alla trattazione originale, alcune delle quali traggono partito dalle lezioni dettate al corso estivo di Varenna nel 1954 da Massera, la teoria della stabilità secondo Liapunov. La caratterizzazione dei diversi tipi di stabilità (stabilità, stabilità uniforme, asintotica in grande, totale) o criteri atti a decidere se una soluzione di un determinato sistema è stabile e in quale modo sono studiati qui con molta precisione. Trovano così posto, oltre ai risultati di Liapunov, tutta la gamma di risultati ottenuti da numerosi matematici di diverse scuole (fra i quali devesi annoverare lo stesso Conti) che sarebbe lungo elencare.

Da questo rapido esame degli argomenti trattati risulta chiaramente l'importanza scientifica di quest'opera che sarà utilmente consultata sia dai cultori di matematica pura che da quelli di matematica applicata.

Chiude il libro un elenco degli autori citati sia nel testo, sia nell'abbondante ed accurata bibliografia inserita nelle note a piè di pagina. La monografia si avvale della nitida veste tipografica caratteristica delle Monografie Matematiche del C.N.R. e, come mezzo di espressione, di ben 133 figure di notevole chiarezza ed efficacia.

GUIDO STAMPACCHIA

B. SEGRE, « *Proprietà locali e globali di varietà e di trasformazioni differenziali con speciale riguardo ai casi analitici ed algebrici* », Centro Intern. Matem. Estivo, 5 Ciclo; Pavia 26 sett.-5 ott. 1955.

La geometria differenziale si occupa principalmente di proprietà locali. I risultati più interessanti e più suggestivi sono però quelli che dallo studio di proprietà locali conducono a proprietà globali o in grande assegnando, in particolare, caratterizzazioni di enti algebrici.

La monografia di B. Segre dà un ampio saggio del collegamento tra proprietà locali e proprietà globali e del collegamento, inoltre, tra geometria differenziale e geometria algebrica.

La monografia trae la sua origine da un corso di lezioni tenuto dall'A. a Pavia nel sett.-ott. 1955 nel quadro dei corsi estivi organizzati dal C.I.M.E.. Molti dei risultati contenuti in essa sono dovuti all'A. e vari tra essi appaiono qui per la prima volta. Nel corso dell'esposizione, ma soprattutto nelle notizie storiche che chiudono ciascuna delle 6 lezioni sono sovente suggerite ulteriori ricerche.

Chiude la monografia una ampia ed esauriente bibliografia tale da facilitare il lettore che voglia approfondire lo studio dei vari argomenti o dedicarsi a qualcuna delle ricerche suggerite.

L'esposizione, per quanto breve, del contenuto di ciascuna lezione, darà un quadro sufficiente degli argomenti trattati e del collegamento tra essi.

Lezione 1^a. « *Invarianti differenziali di trasformazioni puntuali e dualistiche* ».

Siano P, Q e P', Q' punti corrispondenti in una corrispondenza biunivoca T di classe C^1 tra due regioni di due spazi euclidei orientati (reali). Se la retta PQ , al variare di Q , tende alla posizione limite r , la retta $P'Q'$ tende

biamento formale di coordinate che fornisce la

$$U = aX + A_{ij} \dots_i X^i Y^j \dots Z^l$$

$$V = bY + B_{ij} \dots_i X^i Y^j \dots Z^l$$

$$\dots \dots \dots , \dots \dots \dots$$

$$W = cZ + C_{ij} \dots_i X^i Y^j \dots Z^l$$

come equazioni formali di T nell'intorno di O .

Per $A=B=\dots=C=0$ segue la riduzione formale a forma canonica per le trasformazioni T aritmeticamente generali.

Una elegante dimostrazione stabilisce poi che se la T è aritmeticamente generale è sufficiente che i coefficienti di dilatazione $a, b, \dots, c$ siano ciascuno in valore assoluto inferiori (ovvero maggiori) dell'unità affinché esista un cambiamento effettivo di variabili che riduca la T a forma canonica.

Vengono poi trattati in questa lezione l'iterazione e la permutabilità di trasformazioni analitiche, nonchè lo studio delle trasformazioni cicliche.

A chiusura della lezione è assegnata una categoria abbastanza vasta di trasformazioni aritmeticamente generali non rappresentabili linearmente.

Quasi tutti i risultati contenuti in questa lezione appaiono qui per la prima volta.

Lezione 3ª. « *Invarianti di contatto e di osculazione. La nozione di birapporto in geometria differenziale* ».

Questa lezione si divide in due parti.

Nella prima si determinano gli invarianti proiettivi di contatto di due rami L, L' di curve appartenenti ad un S_n ed aventi la stessa origine sia nel caso che essi abbiano gli stessi spazi k -osculatori ($k=1, 2, \dots, n$) con contatto ugualmente elevato per ciascuno dei due rami ($n-1$ invarianti); sia nel caso che i rami L, L' siano lineari e coincidano gli spazi k osculatori per $k=1, 2, \dots, r(<n)$ ($n-2$ invarianti).

Di tali invarianti se ne dà un significato mediante birapporti analogo a quello dato da C. Segre nel caso $n=2$.

Come applicazione si consegue l'elegante risultato che gli invarianti di dilatazione di una trasformazione T in un punto fisso O si possono esprimere mediante soli invarianti di Mehmke Segre.

In un caso poi abbastanza semplice, eppure relativamente generale, si determinano gli invarianti di contatto di due calotte m -dim.li tangenti tra loro.

La seconda parte della lezione riguarda l'estensione del concetto di birapporto in casi abbastanza estesi.

A base di queste estensioni è il teorema: se una W_{k+1} appartiene ad una quadrica Q ed è luogo di $\infty^1 V_k^2$ in generale non specializzate, esistono sulla W ∞^k linee (associate) che punteggiano proiettivamente due generiche V_k^2 .

Per $k=1$ si ha un sistema ∞^1 di coniche e si può pertanto definire il birapporto di quattro punti della superficie W come birapporto delle quattro linee associate passanti per i 4 punti, che è il birapporto di quattro punti di una conica.

Lezione 4ª. - « *Linee principali e linee proiettive di una superficie ed alcune applicazioni* ».

Sia L una curva appartenente ad una superficie S (non sviluppabile) di un S_3 proiettivo. Il piano osculatore in un punto P di L interseca S in una curva avente con L in P la stessa tangente e lo stesso piano osculatore e quindi (Lez. prec.) si ha un invariante proiettivo J^* . Dualmente si ha un invariante proiettivo J associato al punto P di L . Tra J ed J^* si ha la relazione, $JJ^* - J - J^* = 0$.

Linea principale è una linea L lungo la quale $J = c$; al variare della costante c si hanno le ∞^4 linee principali costituenti un sistema invariante per omografie.

Per $J = \infty, 1, 0$ si ottengono rispettivamente le linee piane, coniche, pangeodetiche.

Un sistema ∞^3 di linee principali $J = c$ è mutato in sè sia dalle omografie che dalle correlazioni se e sole se $J = J^*$, ossia per $c = 0$ (pangeodetiche) ovvero per $c = 2$, linee proiettive.

L'introduzione di quest'ultime linee e di quelle principali è dovuta all'A..

Tra i risultati che appaiono per la prima volta ricordiamo: la caratterizzazione delle superficie (le superficie rigate e le superficie di coincidenza) sulle quali le asintotiche dei due sistemi si punteggiano mutuamente con conservazione dei birapporti, la caratterizzazione delle trasformazioni puntuali tra due superficie che mutino linee proiettive in linee proiettive; e infine la determinazione di un estremo superiore per le linee piano-coniche passanti per un punto di una superficie (non quadrica) di S_3 .

Lezione 5ª. - « *Alcune proprietà differenziali in grande relative alle curve algebriche ed alle loro intersezioni e corrispondenze* ».

I coefficienti di dilatazione λ , in un punto fino O , semplice, di una trasformazione analitica T di una V_n , in se sono tutti diversi da 1 ed il numero (complesso) $\omega = \sum_i \frac{1}{1 - \lambda_i}$, residuo di T in O , è un invariante topologico differenziale di T in O .

Per $n = 1$, se $\theta(x, X) = 0$ è l'equazione della T , ω coincide con il residuo in O della funzione analitica $\varphi(x) = \left(\frac{\partial}{\partial X} \lg \theta \right)_{x=X}$.

Quest'ultimo, per definizione, si assume come residuo di T anche nel caso che il punto fisso O non sia semplice.

Questa definizione nel caso che T sia una corrispondenza algebrica di una curva algebrica C in sè conduce a notevoli risultati dovuti all'A. In particolare, se la C è di genere p e la T (non composta con l'identità) ha indici (α, β) e valenza γ , la somma dei residui nei punti uniti è data da, $\beta + \gamma p$. Applicando il risultato alla T^{-1} segue il principio di corrispondenza di Cayley Brill-Hurwitz.

Oltre poi ad una elegante interpretazione geometrica, che appare qui per la prima volta, degli integrali abeliani e dei loro residui, ricordiamo l'applicazione relativa alle intersezioni di due curve algebriche (di cui una almeno a valenza 0) appartenenti ad una superficie (algebrica) F contenente due fasci di curve unisecanti.

In particolare se F è un piano si determinano le relazioni che intercedono fra gli elementi differenziali appartenenti alle due curve ed aventi origine nei loro punti d'intersezione, riottenendo nel caso che una delle due curve è una retta, le ben note relazioni di Reiss.

A termine della lezione sono segnalati interessanti problemi di intersezione che conducono a proprietà algebrico-differenziali.

Lezione 6ª. - « *Estensioni alle varietà algebriche* ».

Le proprietà delle curve algebriche esaminate nella precedente lezione e che in questa vengono estese alle varietà algebriche riguardano soprattutto: 1) la determinazione delle relazioni di Reiss tra calotte del 2° ordine appartenenti ad una V_n , ed aventi centri nei punti d'intersezione con una curva, in particolare su una retta; 2) proprietà delle corrispondenze algebriche T di varietà algebriche in sè.

Nei riguardi di quest'ultime, calcolato il residuo ω di una T in un punto fisso semplice O , si determinano varie proprietà della T e si esaminano alcuni casi nei quali la T è degenera. Supposto poi la T a valenza zero e con un numero finito di punti fissi isolati semplici, si determina l'espressione del residuo totale della T (somma dei residui nei punti fissi) per mezzo degli

indici α, β della T e dei suoi ranghi, ottenendo come conseguenza il principio di coincidenza di Severi. Esteso poi, analogamente al caso $n=1$, il concetto di residuo anche al caso che il punto fisso O non sia semplice calcolando esso come residuo, in O , di una determinata funzione analitica, se ne fanno applicazioni a corrispondenze T a valenza qualunque con particolare riguardo alle corrispondenze algebriche di uno spazio proiettivo in sé.

I pregi dell'esposizione e la ricchezza dell'informazione storica e bibliografica rendono quest'opera utilissima per chi voglia prendere conoscenza degli argomenti trattati, e più ancora a quegli studiosi che si dedicano allo studio di questo campo trovando in quest'opera moltissimi suggerimenti di ricerca.

Un'esposizione ampliata degli argomenti trattati nella monografia apparirà quanto prima (in lingua inglese) in un volume degli *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*.

CARMELO LONGO

A. MAROS DEL'ORO, *La Teoria Fisica*. Padova, C.E.D.A.M., 1955, pp. VIII-155.

L'opera, dedicata soprattutto all'esame del rapporto fra « legge di natura e teoria fisica », nonchè all'interpretazione « complementare » di quest'ultima, si suddivide in quattro parti.

Nella prima parte (« Definizioni e distinzioni »), l'A., oltre a differenziare genericamente la teoria, quale pura interpretazione di fenomeni, dalla legge, intesa come universalizzazione induttiva di casi osservati, ed a suggerire che, « se questa si limita a mettere un fenomeno in funzione di altri, a descrivere cioè i loro rapporti sperimentali, quella, andando più a fondo, cerca di mostrarci l'intima natura del fenomeno stesso », tenta di approfondire la distinzione prospettata considerando criticamente dottrine di Duhem, Mach, Meyerson ed altri al riguardo. Identificate nell'osservazione (a), nella formulazione delle ipotesi (b), nella deduzione di conseguenze da queste (c), e nella riprova sperimentale (d) le quattro fasi della ricerca fisica, il Dell'Oro sottopone ad analisi leggi ed enunciati teorici dell'ottica, della meccanica, della cosmologia e simili, con l'intento di mostrare che i secondi si differenziano dalle prime specialmente in rapporto a (b), (c) e (d). Lo stabilimento delle teorie, cioè, più di quello delle leggi, è caratterizzato da ipoteticità, dall'impiego di criteri analogici, dalla derivabilità di conseguenze generali, e dalla possibilità di conferme soltanto indirette. Nondimeno, le teorie a volte possono trasformarsi in leggi, e ciò quando opportune scoperte empiriche permettano di sostituire alla verifica indiretta quella diretta. La teoria copernicana, ad esempio, data la relatività del moto, e, quindi, l'impossibilità intrinseca di dimostrare l'eliocentrismo, rimarrà sempre una teoria, mentre il sistema periodico degli elementi chimici, in origine presentato come una teoria, essendosi ormai « sperimentato tutto di tutti gli elementi », sarebbe divenuto una legge.

La seconda parte (« Interpretazione della teoria ») ha un carattere meno strettamente metodologico scientifico ed in misura maggiore filosofico speculativo. In essa, dapprima, l'A. si preoccupa di confutare le interpretazioni realistica (o democritea) e positivista (o machiano operazionistica, o matematico nominalistica) della teoria fisica, interpretazioni attribuite rispettivamente a Planck (secondo cui gli elementi teorici più remoti dall'esperienza sarebbero i dati più propriamente « reali » della ricerca scientifica), ed a Mach, Duhem, Poincaré, Heisenberg, Bohr, Born, Pauli, Schlick, Carnap, Bridgman, Eddington ed altri (secondo i quali le teorie avrebbero unicamente giustificazioni estetico pragmatiche. Ad Einstein si

attribuiscono tesi di entrambi i tipi). Quindi, mediante un'estensione della dottrina di Bohr viene suggerita l'interpretazione « complementare » delle teorie fisiche, il concetto stesso di complementarità essendo inteso dall'A. come « coassunzione di elementi diversi e apparentemente escludentisi se se presi sul medesimo piano o nelle medesime circostanze sperimentali, e tuttavia reali su piani e in circostanze diverse ». Stando alla teoria termodinamica, per esempio, il calore è movimento di molecole, mentre ai sensi consta solo il caldo: ora, non sussistendo ragione alcuna per negare l'uno o l'altro fenomeno, si deve concludere trattarsi di due fenomeni realizzantisi su piani ed in circostanze differenti, ossia, nel senso precisato sopra, complementari. Da ciò risulta che il generale punto di vista sostenuto dall'A. coincide, almeno parzialmente, con un realismo oggettivistico non platonico.

Tale realismo affiora anche nella terza parte (« I criteri dell'ipotesi »). Ivi l'A., postosi il quesito se gli elementi esplicativi delle teorie fisiche vengano supposti con particolari criteri, non solo suggerisce essere due i criteri impiegati allo scopo, il criterio della semplicità e quello della regolarità, ma procede anche a fornire una giustificazione di tipo — tendenzialmente, per lo meno — oggettivo realistico. Infatti, dopo aver considerate le concezioni di Mach, Poincaré, Duhem, e dei neopositivisti, secondo cui il criterio di semplicità sarebbe giustificabile solo soggettivamente (la natura restando in ogni caso complessa), e dopo aver discusse diverse tesi relative al criterio di regolarità (ad esempio, le tesi platoniche ed aristoteliche, secondo le quali l'esistenza di connessioni regolari in natura sarebbe dovuta ad ipostatiche Forme od Essenze operanti in essa; tesi riecheggiate — a dire dell'A. — da scienziati moderni come Galileo, Newton, Ampère ed altri, fautori di un realismo aprioristico e dogmatico), il Dell'Oro affronta il problema del principio d'uniformità e dell'induzione, per concludere, contro l'estremo convenzionalismo e nominalismo di Pearson, Le Roy, Eddington e Russel, che se la « regolarità assoluta non è obbiettiva, implicando il fattore soggettivo della nostra astrazione, non esclude comunque una regolarità nei fenomeni naturali ». Anzi, « si può dar ragione e merito ai criteri di semplicità e regolarità espresse dalla nostra scienza, proprio a patto che non neghino il loro fondamento in natura ». Tutto ciò, entro il quadro critico di una concezione probabilistica e non assolutistica.

La quarta parte, infine, ha per tema « Lo sviluppo della teoria fisica », tema che l'A. esamina diffusamente. Le teorie fisiche rappresentano fasi elaborate della conoscenza scientifica, presupponendo concetti definiti o leggi, se non altre teorie (Huygens, ad esempio, è giunto alla teoria ondulatoria della luce attraverso la considerazione dell'analoga teoria acustica). Esse, inoltre — sempre a due dell'A. — tendono a congiungersi in complessi sistematici atti a fondare interi settori della fisica, com'è illustrato dalle teorie della relatività e dei quanti. Ovviamente, anche a causa degli ineliminabili elementi di astrazione soggettiva, ogni teoria risulta passibile di modifiche, ossia, di estensioni, alterazioni e riduzioni. Ciò, tuttavia, può verificarsi solo a patto che i requisiti della coerenza logica e del controllo empirico, sia pure indiretto, vengano comunque soddisfatti. Talvolta, teorie apparentemente sicure debbono essere abbandonate, od, almeno, si rende necessario integrarle con l'introduzione di nuovi enti (il neutrino di Fermi ed il positrone di Dirac, per esempio). Nei casi, poi, in cui si determini un contrasto non fra teorie e fatti, ma fra teorie e teorie, prevalgono, di solito, salve restando le altre condizioni, le teorie più semplici e quelle dotate di maggior potere esplicativo. Oppure, se possibile, una teoria viene inglobata nell'altra secondo uno schema comparabile al rapporto fra relatività einsteiniana e meccanica di Newton.

Il lavoro nel suo complesso risente alquanto, a nostro avviso, di un non compiuto approfondimento nella discriminazione fra aspetti logici ed aspetti psicologici del problema; così pure ci sembra che il Dell'Oro si valga di un linguaggio un po' generico, dato il tipo d'indagine intrapresa. Infine, certi giudizi che si trovano nell'opera possono apparire discutibili (ad esempio,

le valutazioni di molte tesi neopositivistiche o di eminenti fisici contemporanei) e qualcuno addirittura inadeguato (come la prospettata caratterizzazione degli assiomi, a pag. 77, quali enunciati auto evidenti). D'altra parte si deve pure riconoscere che i problemi affrontati dall'A. sono senza dubbio ardui ed importanti, non molto studiati in Italia e lungi dall'essere definitivamente chiariti anche all'Estero, e che diverse tesi generali avanzate in proposito dal Dell'Oro possono, nella sostanza, venire senz'altro condivise. Così l'antiplatonismo, la distinzione fra matematica pura e matematica applicata nella fisica, il rilievo attribuito alla probabilità, ed altre ancora.

ALBERTO PASQUINELLI

F. HIRZEBRUCH, *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge - Heft 9, Springer-Verlag, 1956, pp. VIII + 165; prezzo DM. 30,80.

Questo volume costituisce la prima trattazione organica dedicata ai nuovi metodi topologici dei quali si è arricchita la Geometria Algebrica in quest'ultimo decennio. Tali metodi fanno capo essenzialmente alla teoria degli spazi fibrati ed a quella dei fasci (*faisceaux*) di gruppi abeliani; appartenendo dunque a campi originariamente ben lontani da quelli della geometria algebrica, hanno richiesto, per essere trasportati nell'ambito di quest'ultima, un lungo lavoro di adattamento. Di questa elaborazione — rivelatasi di notevole importanza e ricca di una nuova, fertile problematica — restano disgraziatamente tracce molto succinte nelle riviste specializzate, poichè gran parte di essa ha formato oggetto di pubblicazioni poligrafate difficilmente reperibili. I pochi lavori a stampa riduconsi spesso a schematiche note riassuntive ove le dimostrazioni vengono talora appena accennate.

Questo libro di Hirzebruch è volto appunto a colmare, almeno in parte, questa lacuna, ed a fornire al Lettore un'opera che permetta di assimilare le nuove tecniche dimostrative. Esso consta di quattro capitoli.

Nel primo di essi, dopo alcune considerazioni preliminari sui fasci di gruppi abeliani (secondo la definizione di Lazard) e sulla coomologia a coefficienti in un fascio — con particolare riguardo alla coomologia degli spazi paracompatti ed ai fasci sottili — vengono studiate le strutture fibrate a fibra vettoriale reale o complessa con speciale attenzione al problema della riducibilità del gruppo di struttura; vengono definite — per via assiomatica e con un fugacissimo accenno alla definizione omotopica ed a quella basata sugli spazi universali — le classi di Chern di una struttura unitaria, e, attraverso queste, le classi di Pontryagin di una struttura unitaria od ortogonale. Infine vengono definiti vari modi di composizione fra strutture unitarie, e vengono stabiliti per le corrispondenti classi di Chern, le relazioni di Whitney Wu Wen Tsun-Chern ed alcuni legami altrimenti deducibili dalle formule di Hopf-Kundert.

Nel secondo capitolo, dedicato all'algebra di Thom, viene stabilito — con un'argomentazione diversa da quella originale di Thom — il fondamentale teorema secondo il quale l'indice di una varietà differenziabile (la cui di menzione sia un multiplo intero di quattro) può esprimersi mediante un polinomio nei numeri di Pontryagin della varietà considerata.

Il terzo capitolo riguarda i generi di Todd di una varietà quasi complessa, per i quali l'A. ha elaborato un metodo di calcolo basato sull'algoritmo delle successioni moltiplicative, il quale consente di stabilire per tali generi una serie di notevoli proprietà formali.

Nel quarto capitolo, dopo aver esposto i fondamenti della teoria delle forme armoniche a coefficienti in una struttura fibrata analitica, avente per fibra tipo uno spazio vettoriale complesso, e dopo aver stabilito — con sommarî schemi dimostrativi — i teoremi di Dolbeault-Serre e di Kodaira, ed il teorema di dualità di Serre, si indicano, senza dimostrazione, i risultati fondamentali di Kodaira sulla caratterizzazione delle varietà algebriche mediante l'esistenza su di esse di una metrica di Hodge. Sulla base dei risultati suddetti viene infine enunciato e dimostrato il teorema di Riemann-Roch per una struttura analitica fibrata, sopra una varietà algebrica non singolare, da rette complesse, e, più in generale, per una struttura analitica fibrata, sopra una varietà del tipo suddetto, da spazi vettoriali complessi. Incidentalmente viene stabilita una classica congettura di Severi sull'espressione del genere aritmetico di una varietà algebrica mediante i numeri delle forme di prima specie dei diversi ordini, linearmente indipendenti sulla varietà stessa.

L'A. ha cercato, per quanto possibile — come egli stesso avverte nell'Introduzione — di dare alla sua trattazione il massimo grado di autonomia compatibile con i ristretti limiti posti alla mole dell'opera. Tuttavia il ricorso a teorie e risultati i quali non avevano potuto essere neppure compendati era talora inevitabile, così, ad es., gran parte della dimostrazione dell'enunciato generale del teorema di Riemann-Roch dianzi ricordato, riposa sopra un risultato tuttora inedito di A. Borel sulla successione spettrale di uno spazio fibrato del tipo suddetto. Ma tali rinvii sono rigorosamente circoscritti, mentre, per le rimanenti dimostrazioni, le indicazioni schematiche fornite dall'A. — agevolate da un'accurata suddivisione e numerazione dei paragrafi — bastano a ricostruire i dettagli e danno al volume un carattere di esemplare rigore e chiarezza.

EDOARDO VESENTINI