Bollettino
Unione Matematica Italiana

Aldo M. Pratelli

Tensore energetico e azioni ponderomotrici di campi generalizzati nello spazio-tempo

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.2, p. 192–199.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_2_192_0>

Tensore energetico e azioni ponderomotrici di campi generalizzati nello spazio - tempo.

Nota di ALDO M. PRATELLI (a Milano).

Sunto. - *Col procedimento di* HILBERT *(variazione dei coefficienti della metrica) viene costruito il tensore energetico dei più generali campi spazio-temporali di* FINZI. *Mediante la divergenza di tale tensore doppio simmetrico si calcola il vettore che rappresenta le azioni ponderomotrici.*

Il campo elettromagnetico (nel vuoto) si rappresenta notoriamente nello spazio-tempo con un tensore doppio emisimmetrico $F_{\alpha\beta} = - F_{\alpha\beta}$, e la distribuzione elettrica col vettore j^α. La densità spazio-temporale d'azione è la differenza tra la densità d'azione di puro campo $\frac{1}{4} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ e la densità d'azione sostanziale elettrica $\Phi_\alpha j^\alpha$, ove Φ_α è il potenziale elettromagnetico. Questa densità di azione può convenientemente generalizzarsi aggiungendo invarianti quadratici dello spazio-tempo. Si deduce in tal modo un *campo generalizzato*, rappresentato dal tensore emisimmetrico $F_{\alpha\beta}$ e dal vettore j^α, che rappresenta la corrispondente *distribuzione*. Gli invarianti quadratici che vengono aggiunti nella densità d'azione sono formati con $F_{\alpha\beta}$, j^α e i *due* potenziali, Φ_α e Ψ_α, del tensore $F_{\alpha\beta}$. È noto [1] che da un principio di stazionarietà dell'azione generalizzata (integrale quadruplo della densità d'azione, esteso a una generica regione dello spazio-tempo) rispetto ai due potenziali, a parità dei coefficienti della metrica e di densità (tensoriale) $\mathfrak{j}^\alpha$ di distribuzione, si ottengono due equazioni indefinite; esse contengono essenzialmente, nella loro espressione più generale, cinque costanti universali [2]; quando tutte le costanti sono nulle, si ritrovano

[1] B. FINZI, *Sul principio della minima azione e sulle equazioni elettromagnetiche che se ne deducono*, «Rend. Acc. Lincei», (8), **12** (1952), pp. 378-382, 477-480; B FINZI, *Sopra una estensione dei campi elettromagnetici*, ivi, (8), **13** (1952), pp. 211-215.

[2] Di queste, λ ha le dimensioni d'una lunghezza, $\varkappa$, χ, μ, ν sono puri numeri. Oltre a queste cinque costanti, interviene ovviamente la velocità della luce.

le equazioni del campo elettromagnetico di MAXWELL; se sono nulle le quattro costanti che hanno le dimensioni d'un puro numero, si ritrovano le equazioni del campo vettoriale (reale) di PROCA–YUKAWA; annullando invece tre convenienti costanti numeriche si ottengono le equazioni di un campo studiato da UDESCHINI (3).

Per dedurre il tensore energetico ci si può servire di un procedimento introdotto da HILBERT per il campo elettromagnetico (4). Tale procedimento esige il calcolo della variazione che subisce l'azione in conseguenza di una variazione arbitraria dei coefficienti della metrica spazio–temporale. In tale ordine di idee, recentemente C. VAGHI (5) ha dedotto il tensore energetico che si riferisce al campo studiato da UDESCHINI.

Nella presente Nota riprendo in esame l'azione nella sua espressione più generale, in cui tutte le cinque costanti possono essere non nulle, deducendone le equazioni del campo generalizzato in un generico spazio–tempo riemanniano, quale è richiesto dal procedimento di HILBERT. Valendomi del suddetto procedimento costruisco il tensore energetico e, valutandone successivamente la divergenza, ottengo le azioni ponderomotrici, che generalizzano quelle di LORENTZ.

Mi sembra interessante far rilevare che, mentre per il campo elettromagnetico maxwelliano e per il campo mesonico di PROCA–YUKAWA nel dare una variazione arbitraria ai coefficienti della metrica è indifferente lasciare invariato il tensore *campo* oppure lasciare invariato l'unico suo potenziale, nel caso dei campi generalizzati non è la stessa cosa.

(3) P. UDESCHINI, *Sopra un campo estendente quello elettromagnetico*, « Rend. Acc. Lincei », (8), **13** (1952), pp. 246-253.

(4) D. HILBERT, *Die Grundlagen der Physik*, « Gött. Nachr. », (Math. Phys. Klasse) 1915, pp. 395-407; 1917, pp. 53-76; « Math. Annalen », **92** (1924), pp 1-32. Il procedimento di HILBERT presuppone la teoria della materia di MIE. Fu successivamente usato da LORENTZ e da FOKKER, per il campo elettromagntico che obbedisce alla teoria degli elettroni di LORENTZ: cfr. H. A. LORENTZ, *Oer Einstein's theorie der Zwaartekracht*, « Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam » **24** (1916), pp. 1389-1402, 1759-1774, **25** (1916), pp. 468-489, 1380-1396; A. D. FOKKER, *De virtueele verplaatsingen van het electromagnetische en van het zwaartekrachtsveld bij de toepassing van het variatiebeginsel van Hamilton*, ivi, pp. 1067-1084.

(5) C. VAGHI, *Energia di campi emisimmetrici spazio-temporali*, in corso di stampa in questo « Bollettino ».

1. La metrica e il tensore di Ricci.

Riferiamoci ad uno spazio-tempo riemanniano, la cui metrica quadridimensionale indefinita abbia forma generale

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3) \text{ [6]}. \tag{1}$$

Assumo come tensore di RICCI $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ il tensore (reale) emisimmetrico rispetto a tutti gli indici, le cui componenti con almeno due indici eguali son nulle, mentre le componenti covarianti sono eguali a $\sqrt{-g} = \sqrt{-\|g_{\alpha\beta}\|}$ quando gli indici formano una permutazione della stessa classe della permutazione (0, 1, 2, 3), e sono eguali a $-\sqrt{-g}$ se formano una permutazione di classe opposta.

Con tale tensore si forma il *coniugato* [7] del tensore campo

$$*F^{\gamma\delta} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta}. \tag{2}$$

Ogni tensore emisimmetrico può sempre decomporsi nella somma [8]

$$F_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} + K_{\alpha\beta} \tag{3}$$

ove [9]

$$H_{\alpha\beta} = \Phi_{\beta/\alpha} - \Phi_{\alpha/\beta} = \Phi_{\beta,\alpha} - \Phi_{\alpha,\beta} \quad \text{e inoltre} \quad \Phi_\alpha{}^{/\alpha} = 0 \tag{4}$$

e quindi

$$*H_{\alpha\beta}{}^{/\beta} = 0\,; \tag{4'}$$

mentre invece

$$*K_{\alpha\beta} = \Psi_{\beta/\alpha} - \Psi_{\alpha/\beta} = \Psi_{\beta,\alpha} - \Psi_{\alpha,\beta} \quad \text{e inoltre} \quad \Psi_\alpha{}^{/\alpha} = 0 \tag{5}$$

e quindi

$$K_{\alpha\beta}{}^{/\beta} = 0. \tag{5'}$$

[6] Secondo le consuete convenzioni, gli indici in basso sono di covarianza e quelli in alto di controvarianza; è sottinteso il simbolo di sommatoria nella saturazione di indici.

[7] Dalla (2) segue

$$**F_{\alpha\beta} = -F_{\alpha\beta}; \qquad F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = -*F^{\gamma\delta}*F_{\gamma\delta}$$

È forse superfluo avvertire che il tensore di RICCI, nelle Note citate in [1], [7] e [10], è definito come in G. RICCI-CURBASTRO, *Opere*, Roma, 1957, **2**, p. 164 (e quindi le componenti sono ivi immaginarie, in quanto la metrica (1) è indefinita).

[8] B. FINZI, l. c. [1], p. 380.

[9] Gli indici preceduti da lineetta inclinata sono di derivazione tensoriale nella metrica (1), preceduti da virgola sono di derivazione parziale ordinaria.

2. L'Azione generalizzata.

Posto $dx = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$, se Ω è una regione dello spazio–tempo che ha per elemento di ipervolume $d\Omega = \sqrt{-g}\, dx$ e per contorno le ipersuperficie tridimensionale Σ, definiamo come azione la differenza

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{(c)} - \mathfrak{L}_{(s)}$$

ove

$$\mathfrak{L}_{(c)} = \int_\Omega L_{(c)} \sqrt{-g}\, dx \tag{6}$$

$$\mathfrak{L}_{(s)} = \int_\Omega L_{(s)} \sqrt{-g}\, dx \tag{6'}$$

Le densità d'azione sono rispettivamente date da

$$L_{(c)} = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{\varkappa}{4} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} - \frac{1}{2\lambda^2} (\Phi_\alpha \Phi^\alpha + \mu \Psi_\alpha \Psi^\alpha + \nu \Phi_\alpha \Psi^\alpha) \tag{7}$$

$$L_{(s)} = (\Phi_\alpha + \chi \Psi_\alpha) j^\alpha \tag{7'}$$

L'integrale quadruplo $\mathfrak{L}_{(s)}$, contenente il vettore distribuzione j^α, rappresenta l'*azione sostanziale generalizzata,* mentre $\mathfrak{L}_{(c)}$ rappresenta l'*azione di puro campo generalizzata.*

Si osservi che

$$\mathfrak{L}_{(c)} = \frac{1}{4} \int_\Omega g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \{ F_{\alpha\gamma} F_{\beta\delta} + 2\varkappa F_{\alpha\gamma} {}^*F_{\beta\delta} \} \sqrt{-g}\, dx -$$
$$- \frac{1}{2\lambda^2} \int_\Omega g^{\alpha\beta} \{ \Phi_\alpha \Phi_\beta + \mu \Psi_\alpha \Psi_\beta + \nu \Phi_\alpha \Psi_\beta \} \sqrt{-g}\, dx.$$

Sostituendo al posto di $F_{\alpha\beta}$ la somma (3), troviamo

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{L}_{(c)} = {} & \frac{1}{4} \int_\Omega g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \{ H_{\alpha\gamma} H_{\beta\delta} + {}^*K_{\alpha\gamma} {}^*K_{\beta\delta} + 4\varkappa H_{\alpha\gamma} {}^*K_{\beta\delta} \} \sqrt{-g}\, dx + \\ & + \frac{1}{4} \int_\Omega g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \{ 2 H_{\alpha\gamma} K_{\beta\delta} + 2\varkappa H_{\alpha\gamma} {}^*H_{\beta\delta} + 2\varkappa K_{\alpha\gamma} {}^*K_{\beta\delta} \} \sqrt{-g}\, dx - \\ & - \frac{1}{2\lambda^2} \int_\Omega g^{\alpha\beta} \{ \Phi_\alpha \Phi_\beta + \mu \Psi_\alpha \Psi_\beta + \nu \Phi_\alpha \Psi_\beta \} \sqrt{-g}\, dx \end{aligned}\right. \tag{8}$$

dove però il secondo integrale quadruplo si trasforma in integrale superficiale sul contorno Σ; è facile rilevare che la funzione integranda, in virtù delle (4') e (5'), è la divergenza d'un vettore ([10]).

In definitiva

$$\mathfrak{L} = \int_{\Omega} \{ \bar{L}_{(c)} + \bar{L}_{(\Sigma)} - L_{(s)} \} \sqrt{-g}\, dx \tag{8'}$$

ove

$$\bar{L}_{(c)} = \frac{1}{4} g^{\gamma\delta} g^{\rho\sigma} \{ H_{\gamma\sigma} H_{\delta\rho} - {}^*K_{\gamma\sigma} {}^*K_{\delta\rho} + 4\varkappa H_{\gamma\sigma} {}^*K_{\delta\rho} \} -$$
$$- \frac{1}{2\lambda^2} g^{\gamma\delta} \{ \Phi_\gamma \Psi_\delta + \mu \Psi_\gamma \Psi_\delta + \nu \Phi_\gamma \Psi_\delta \}$$

$$\bar{L}_{(\Sigma)} = \frac{1}{4} g^{\gamma\delta} g^{\rho\sigma} \{ 2 H_{\gamma\sigma} H_{\delta\rho} + 2\varkappa H_{\gamma\sigma} {}^*H_{\delta\rho} + 2\varkappa K_{\gamma\sigma} {}^*K_{\delta\rho} \}$$

3. Le equazioni di campo.

Calcolando la variazione $\delta\mathfrak{L}$ quando entrambi i potenziali Φ_α e Ψ_α subiscono variazioni arbitrarie, nulle sul contorno Σ, l'annullarsi della variazione stessa equivale all'annullarsi delle derivate hamiltoniane ([11]) della densità $L = \bar{L}_{(c)} - L_{(s)}$.

Poichè l'integrale superficiale della (8) non reca contributo, si ottengono così le equazioni

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(9a)} & F_{\alpha\beta}{}^{/\beta} + 2\varkappa {}^*F_{\alpha\beta}{}^{\beta} = j_\alpha + \frac{1}{\lambda^2} \Phi_\alpha + \frac{\nu}{2\lambda^2} \Psi_\alpha \\ \text{(9b)} & 2\varkappa F_{\alpha\beta}{}^{/\beta} - {}^*F_{\alpha\beta}{}^{/\beta} = /j_\alpha + \frac{\mu}{\lambda^2} \Psi_\alpha + \frac{\nu}{2\lambda^2} \Phi_\alpha \end{array} \right.$$

Le (9a) e (9b) coincidono sostanzialmente ([12]) con quelle ottenute

([10]) Si osservi ad es.

$$\frac{1}{4}\int_{\Omega} H_{\alpha\gamma} {}^*H^{\alpha\gamma} \sqrt{-g}\, dx = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \Phi_{\gamma/\alpha} {}^*H^{\gamma\alpha} \sqrt{-g}\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega} (\Phi_\gamma {}^*H^{\gamma\alpha})_{/\alpha} \sqrt{-g}\, dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega} \Phi_\gamma {}^*H^{\alpha\gamma}{}_{/\alpha} \sqrt{-g}\, dx$$

ove il primo integrale si trasforma in integrale superficiale, e dà il flusso del vettore $\Phi_\gamma {}^*H^{\alpha\gamma}$ attraverso l'ipersuperficie Σ, mentre il secondo è nullo per la (4') Cfr. anche A. M. PRATELLI, *Principî variazionali del campo elettromagnetico*, « Annali Sc. Norm. Sup. Pisa », (3), 7 (1953), pp. 161-203, form. (5.16).

([11]) Per la definizione di *derivata hamiltoniana* cfr. A. S. EDDINGTON, *The Mathematical Theory of Relativity*, Cambridge, 1924, (p. 139, 187).

([12]) Si tenga presente che, in conseguenza delle (4') e (5'), $F_{\alpha\beta}{}^{/\beta} = H_{\alpha\beta}{}^{/\beta}$, ${}^*F_{\alpha\beta}{}^{/\beta} = {}^*K_{\alpha\beta}{}^{/\beta}$. La diversità tra le equazioni (9a) e (9b), qui riportate, e quelle di B. FINZI, l. c. ([1]), p. 479, è solo apparente (e discende dalla diversa definizione del tensore $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$).

da B. FINZI nello spazio-tempo pseudoeuclideo. Il che è pacifico perchè in tali equazioni non gioca la commutabilità dell'ordine di derivazione.

Non così, naturalmente, per le equazioni nei potenziali. che tale commutabilità compromettono, essendo di secondo ordine. Detto $R_{\chi\beta}$ il tensore di RIEMANN contratto, i potenziali obbediscono alle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \Phi_{\alpha/\beta}{}^{\beta} + \Phi_{\gamma} R^{\gamma}_{.\alpha} + \dfrac{1}{2\lambda^2(1+4\varkappa^2)} \{ 2(1+\varkappa\nu)\Phi_{\alpha} + (\nu+4\varkappa\mu)\Psi_{\alpha} \} = \\ \qquad = -\dfrac{1+2\varkappa\chi}{1+4\varkappa^2} j_{\alpha} & \text{(10a)} \\ \Psi_{\alpha/\beta}{}^{\beta} + \Psi_{\gamma} R^{\gamma}_{.\alpha} + \dfrac{1}{2\lambda^2(1+4\varkappa^2)} \{ (4\varkappa-\nu)\Phi_{\alpha} + 2(\varkappa\nu-\mu)\Psi_{\alpha} \} = \\ \qquad = \dfrac{\chi-2\varkappa}{1+4\varkappa^2} j_{\alpha} & \text{(10b)} \end{cases}$$

4. Il tensore energetico.

Diamo ora una variazione arbitraria (nulla sul contorno Σ) ai coefficienti della metrica (1). L'integrale $\mathfrak{L}_{(s)}$ non dipende dai $g^{\alpha\beta}$, perchè in seguito alla variazione $\delta g^{\alpha\beta}$ non variano nè Φ_{α} e Ψ_{α} (che sono covarianti) nè la densità tensoriale $\mathrm{j}^{\alpha} \equiv j^{\alpha}\sqrt{-g}$. Sarà dunque

$$\delta\mathfrak{L} = \delta\mathfrak{L}_{(c)} = \int \delta \{ \bar{L}_{(c)} \sqrt{-g} \} \, dx$$

cioè

$$\delta\mathfrak{L} = \int \left\{ \frac{\partial \bar{L}_{(c)}}{\partial g^{\alpha\beta}} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} + \bar{L}_{(c)} \delta \sqrt{-g} \right\} dx$$

e introdotti i tensori (simmetrici e isotropi) formati col solo tensore fondamentale ([13])

$$\gamma^{\gamma\delta\sigma\rho}_{\alpha\beta} = g^{\gamma\delta} \left\{ \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} g^{\sigma\rho} - \frac{1}{2} g^{\sigma}_{\alpha} g^{\rho}_{\beta} - \frac{1}{2} g^{\rho}_{\alpha} g^{\sigma}_{\beta} \right\} \tag{11}$$

$$\gamma^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - \frac{1}{2} g^{\gamma}_{\alpha} g^{\delta}_{\beta} - \frac{1}{2} g^{\delta}_{\alpha} g^{\gamma}_{\beta} \tag{11'}$$

si ha

$$\delta\mathfrak{L} = -\int_{\Omega} \frac{1}{2} E_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} \, dx \tag{12}$$

([13]) M. PASTORI, *Un tensore sestuplo isotropo che si incontra in teoria della relatività*, in questo « Bollettino », (2), 1 (1939), pp. 35-37.

dove

$$(12') \qquad E_{\alpha\beta} = \gamma^{\gamma\delta\sigma\rho}_{\alpha\beta}(H_{\gamma\sigma}H_{\delta\rho} - {}^*K_{\gamma\sigma}{}^*K_{\delta\rho} + 4\varkappa H_{\gamma\sigma}{}^*K_{\delta\rho}) - \\ - \frac{1}{\lambda^2}\gamma^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}(\Phi_\gamma\Phi_\delta + \mu\Psi_\gamma\Psi_\delta + \nu\Phi_\gamma\Psi_\delta)\ ([14]).$$

Il tensore doppio simmetrico $E_{\alpha\beta}$, espresso dalla (12), che compare nella (12) come doppio del coefficiente di $\delta g^{\alpha\beta}$ costituisce, secondo il procedimento di HILBERT, il tensore energetico. La regola per costruire tale tensore può dunque esprimersi così: *$E_{\alpha\beta}$ si costruisce sostituendo, nella funzione integranda $L_{(c)}$, il tensore $\gamma^{\gamma\delta\sigma\rho}_{\alpha\beta}$ al prodotto $\frac{1}{4}g^{\gamma\delta}g^{\sigma\rho}$, e il tensore $\gamma^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$ al tensore $\frac{1}{2}g^{\gamma\delta}$.*

5. Le azioni ponderomotrici.

Calcolando la divergenza di $E_{\alpha\beta}$, troviamo ([15])

$$E_{\alpha\beta}{}^{/\beta} = H_{\alpha\rho}H^{\rho}_{.\beta}{}^{/\beta} - {}^*K_{\alpha\rho}{}^*K^{\rho}_{.\beta}{}^{/\beta} + 2\varkappa H_{\alpha\rho}{}^*K^{\rho}_{\beta}{}^{/\beta} + 2\varkappa{}^*K_{\alpha\rho}H^{\rho}_{.\beta}{}^{/\beta} - \\ - \frac{1}{\lambda^2}\Phi_{\rho/\alpha}\Phi^\rho + \frac{1}{\lambda^2}\Phi_{\alpha/\rho}\Phi^\rho - \frac{\mu}{\lambda^2}\Psi_{\rho/\alpha}\Psi^\rho + \frac{\mu}{\lambda^2}\Psi_{\alpha/\rho}\Psi^\rho + \\ + \frac{\nu}{2\lambda^2}(\Phi_{\alpha/\rho}\Psi^\rho + \Phi_\rho\Psi_{\alpha/\rho} - \Phi_{\rho/\alpha}\Psi^\rho - \Phi^\rho\Psi_{\rho/\alpha})$$

cioè

$$E_{\alpha\beta}{}^{/\beta} = \left\{ H^{\rho}_{.\beta}{}^{/\beta} + 2\varkappa{}^*K^{\rho}_{.\beta}{}^{/\beta} - \frac{1}{\lambda^2}\Phi^\rho - \frac{\nu}{2\lambda^2}\Psi^\rho \right\} + \\ + {}^*K_{\alpha\rho}\left\{ - {}^*K^{\rho}_{.\beta}{}^{/\beta} + 2\varkappa H^{\rho}_{.\beta}{}^{/\beta} - \frac{\mu}{\lambda^2}\Psi^\rho - \frac{\nu}{2\lambda^2}\Phi^\rho \right\}$$

e, in conclusione,

$$(13) \qquad E_{\alpha\beta}{}^{/\beta} = (H_{\alpha\rho} + \gamma{}^*K_{\alpha\rho})j^\rho .$$

([14]) L'invariante lineare del tensore energetico vale

$$E^{\alpha}_{\alpha} = E_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = - \frac{1}{\lambda^2}(\Phi_\alpha\Phi^\alpha + \mu\Psi_\alpha\Psi^\alpha + \nu\Phi_\alpha\Psi^\alpha)$$

ed è quindi, in generale, diverso da zero.

Ciò è legato al fatto che l'invariante lineare del tensore sestuplo $\gamma^{\gamma\delta\sigma\rho}_{\alpha\beta}$ è nullo (cfr. M. PASTORI, l. c. ([13])), mentre l'invariante lineare del tensore quadruplo $\gamma^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$ è diverso da zero.

([15]) Le (4') e (5') possono altrimenti scriversi

$$(4'') \qquad H_{\alpha\beta,\gamma} + H_{\beta\gamma,\alpha} + H_{\gamma\alpha,\beta} = 0$$

$$(5'') \qquad {}^*K_{\alpha\beta,\gamma} + {}^*K_{\beta\gamma,\alpha} + {}^*K_{\gamma\alpha,\beta} = 0$$

Il vettore così trovato rappresenta le azioni ponderomotrici del campo. Esso dipende linearmente e omogeneamente dalla distribuzione j^ρ e s'annulla con questa.

Come si vede, il vettore che dà le azioni ponderomotrici non si ottiene componendo con la distribuzione j^ρ il campo $F_{\alpha\rho}$, bensì componendo con j^ρ il tensore $H_{\alpha\rho} + \chi^* K_{\alpha\rho}$, che coincide con $F_{\alpha\rho}$ solo per il campo maxwelliano e per quello di PROCA–YUKAWA, nei quali appunto $F_{\alpha\beta} \equiv H_{\alpha\beta}$ (e $K_{\alpha\beta} = 0$) ([16]).

6. Variazione « a parità di campo » e a « parità di potenziali ».

Quando il campo emisimmetrico $F_{\alpha\beta}$ è individuato dal solo addendo irrotazionale $H_{\alpha\beta}$ (o dal solo addendo solenoidale $K_{\alpha\beta}$), effettuare la variazione della metrica a *parità di campo* o a *parità di potenziale* è la stessa cosa: tenendo costanti le componenti covarianti del campo o tenendo costanti le componenti covarianti del potenziale si ottiene il medesimo tensore energetico. Ciò succede appunto nel caso studiato da HILBERT e da FOKKER per il campo elettromagnetico maxwelliano, e nel caso delle equazioni del campo mesonico vettoriale di PROCA–YUKAWA. Ma non è più la stessa cosa quando il campo $F_{\alpha\beta}$ è costituito in modo essenziale da un addendo irrotazionale e da uno solenoidale. Ciò avviene ad es., quando la sola costante χ è diversa da zero. Le (9a) e (9b) diventano allora

$$\begin{aligned} &(14b) \qquad && \left\{ \begin{aligned} &F_{\alpha\beta}{}^{/\beta} = j_\alpha \\ &-{}^*F_{\alpha\beta}{}^{/\beta} = \chi j_\alpha \end{aligned} \right. \\ &(14b) && \end{aligned}$$

Qualora si effettuasse la variazione a *parità di campo* (vale a dire si calcolasse il prodotto interno di $\gamma_{\alpha\beta}^{\gamma\delta\rho\sigma}$ con $F_{\gamma\rho}F_{\delta\sigma}$) si troverebbe

$$E_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}^{\gamma\delta\rho\sigma} F_{\gamma\rho} F_{\delta\sigma} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + F_{\alpha\rho} F^{\rho\cdot\beta} \tag{15}$$

e le azioni ponderomotrici sarebbero date dal vettore

$$E_{\sigma\beta}{}^{/\beta} = (F_{\alpha\beta} + \chi^* F_{\alpha\beta}) j^\beta \tag{16}$$

diverso ([17]) da quello trovato precedentemente operando a *parità di potenziali*.

([16]) Oppure $K_{\alpha\beta} \neq 0$ ma armonico (cioè irrotazionale e solenoidale).

([17]) In tal modo procede ad es. WHITTAKER, *On Hilbert's World-Function*, « Proc. R. Soc. London », (A), **113** (1927), pp. 496-511, (si vedano in particolare la (22) a pag. 506 e la (34) a pag. 509).