BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ANTONIO PIGNEDOLI

Sul moto di un elettrone veloce in un campo elettrico centrale sovrapposto ad un campo magnetico costante. Applicazioni ai movimenti di un singolo elettrone in particolari tubi elettrici.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 12
(1957), n.2, p. 164–174.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_2_164_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Sul moto di un elettrone veloce in un campo elettrico centrale
sovrapposto ad un campo magnetico costante.
Applicazioni ai movimenti di un singolo elettrone in particolari
tubi elettronici.**

Nota di ANTONIO PIGNEDOLI (a Bologna)

Sunto. - Ci si occupa del problema del movimento di un elettrone veloce in un campo magnetico costante sovrapposto ad un campo elettrico centrale, determinando certi movimenti piani che risultano possibili. Si studiano, poi, il moto di un singolo elettrone veloce in campi del tipo di quelli che intervengono in un tubo moltiplicatore elettronico, ed il moto di un singolo elettrone veloce in campi del tipo di quelli che intervengono nel magnetron monoanodico.

1. Nel programma di studio dei moti di particelle elettrizzate, di energia relativistica, in particolari campi di forza, programma che, per il suo interesse fisico, mi sono da vario tempo proposto ⁽¹⁾, mi sono occupato recentemente ⁽²⁾ del moto relativo di due elettroni veloci che interagiscano mutuamente secondo la legge elettrodinamica di Weber.

Mi occupo ora del problema del movimento di un elettrone veloce in un campo magnetico costante sovrapposto ad un campo elettrico centrale, determinando certi movimenti piani che risultano possibili.

Passo poi a considerare le traiettorie di un elettrone veloce in campi del tipo di quelli che intervengono in un tubo moltiplicatore elettronico (situazione questa, che si può considerare come caso particolare della precedente) ed anche il movimento di un elettrone veloce in campi del tipo di quelli che intervengono nel magnetron monoanodico.

⁽¹⁾ Vedi: A. PIGNEDOLI, « Atti dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti », 1950-51, Tomo CIV, Classe di Scienze matematiche e naturali.

Idem, « Atti e Memorie della Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena », serie V, vol. IX, 1950-51,

Idem, « Atti del Seminario matematico e fisico dell'Università di Modena », vol. V, 1950-51.

⁽²⁾ A. PIGNEDOLI, « Bollettino dell'Unione matematica italiana », serie III, n. 1, marzo 1956.

Consideriamo, in generale, una particella elettrizzata P di massa maupertuisiana m , dotata di carica positiva e , in moto in un campo elettromagnetico stazionario, di vettore elettrico E e vettore magnetico H .

Essendo v il vettore velocità della particella, nell'ipotesi semplificatrice che il movimento della medesima non modifichi il campo, cioè che la particella non irradii un campo elettromagnetico avente energia fornita a spese dell'energia della particella, l'equazione differenziale vettoriale indefinita relativistica del moto del corpuscolo elettrizzato in questione è, come si sa ⁽³⁾:

$$(1) \quad \frac{d}{dt}(mv) = eE + ev \wedge H, \quad \left(m = m_0(1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}\right),$$

con m_0 massa « a riposo » dell'elettrone e c velocità della luce nel vuoto.

Se E ed H sono qualsiasi, nulla può dirsi, in generale, sull'integrazione della (1). Si può soltanto dedurne un notevole integrale primo relativistico, cioè l'integrale relativistico delle forze vive (per E dipendente da un potenziale U). Moltiplicando, invero, ambo i membri della (1) scalarmente per v , si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} v^2 + \frac{m}{2} \frac{d}{dt} v^2 - eE \times v, \\ v^2 dm + \frac{1}{2} md(v^2) = eE \times v dt = dL = edU, \end{aligned}$$

essendosi indicati con L il lavoro della forza elettrica $F = eE$ e con U il potenziale del campo elettrico. Tenendo poi conto del fatto che è

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{m_0^2}{m^2}, \quad d(v^2) = 2c^2 m_0^2 \frac{dm}{m^3},$$

si ottiene:

$$edU = v^2 dm + c^2 \frac{m_0^2}{m^2} dm = \left(\frac{v^2}{c^2} + \frac{m_0^2}{m^2}\right) c^2 dm = d(mc^2),$$

cioè l'integrale relativistico delle forze vive:

$$(2) \quad eU = mc^2 - h, \quad (h = \text{costante}).$$

⁽³⁾ Cfr. H. LORENTZ, *Theory of electrons*, Teubner, Leipzig, 1909.

R. BECKER, *Theorie der Elektrizität*. Band II, Teubner, Berlin (trad. it. di Agno, Einaudi, Torino, 1952).

Si può dire ancora che, nel caso semplice in cui il corpuscolo si muova sotto l'azione del solo campo magnetico (campo elettrico nullo), ne discende immediatamente la costanza nel tempo della quantità di moto relativistica.

Invero, dalla (1), moltiplicando scalarmente per mv , si ottiene:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (m^2 v^2) = 0, \quad m^2 v^2 = \text{cost}; \quad \frac{m_0^2 v^2}{1 - v^2/c^2} = \text{cost};$$

quindi:

$$v^2 = v_0^2 \text{ (costante)}; \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} = m^* \text{ (costante)}.$$

L'equazione del moto si può scrivere, quindi:

$$(1') \quad m^* \frac{dv}{dt} = ev \wedge \mathbf{H},$$

col che si è ridotto il problema al caso non relativistico, con massa (costante) m^* (4).

Opereremo, però, in ogni caso, una trasformazione della equazione (1), atta a ridurla a forma notevolmente più comoda. Introduremo, cioè, nella (1) stessa, in luogo del tempo t , il tempo « proprio » τ legato a t dalla relazione relativistica:

$$(3) \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

(4) Nel caso particolare in cui il campo magnetico sia uniforme ($\mathbf{H}$ costante), se $\mathbf{H}$ è parallelo all'asse delle z , di versore $\mathbf{K}$ ($\mathbf{H} = H \cdot \mathbf{K}$), si ha $\dot{z} = \dot{z}_0$ (costante). Si ha, inoltre, l'integrale delle aree

$$m^* \frac{d}{dt} [(P - O) \wedge v] = eH [zv - (P - O) \times v \cdot \mathbf{K}],$$

cioè, proiettando sull'asse z , dette ρ e θ le coordinate polari nel piano xy :

$$\rho^2 \dot{\theta} + \frac{eH}{2m^*} \rho^2 = \chi \text{ (costante)}.$$

Si hanno, dunque, i tre integrali primi:

$$\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 = v_0^2, \quad \dot{z} = \dot{z}_0, \quad \rho^2 \dot{\theta} + \frac{eH}{2m^*} \rho^2 = \chi.$$

Se $\dot{z}_0 = 0$, il moto è circolare uniforme; i valori costanti di ρ e di $\dot{\theta}$ sono forniti dalle relazioni:

$$\rho^2 \dot{\theta}^2 = v_0^2, \quad \rho^2 \left(\dot{\theta} + \frac{eH}{2m^*} \right) = \chi.$$

Con ciò avremo che, essendo $v = \frac{dP}{dt} = \frac{dP}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{dP}{d\tau} \frac{m_0}{m}$, la (1) diventa:

$$(4) \quad m_0^2 \frac{d^2 P}{d\tau^2} = emE + em_0 \frac{dP}{d\tau} \wedge H,$$

dove è chiaro il significato dei simboli. Dalla (3), poi, si ricava:

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \frac{m^2}{m_0^2} = 1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{dP}{d\tau}\right)^2,$$

e, derivando rispetto a τ :

$$(5) \quad \frac{2mc^2}{m_0^2} \cdot \frac{dm}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dP}{d\tau}\right)^2.$$

Moltiplicando ambo i membri della (4) scalarmente per $\frac{dP}{d\tau}$, si ottiene:

$$(6) \quad \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dP}{d\tau}\right)^2 = \frac{2emE}{m_0^2} \times \frac{dP}{d\tau}; \quad c^2 \frac{dm}{d\tau} = eE \times \frac{dP}{d\tau}.$$

Se il campo elettrico deriva da un potenziale U , allora si ha

$$mc^2 = eU + m_0c^2.$$

Nel caso in cui il campo elettrico E sia, uniforme, confrontando la (6) con la (5) ed integrando rispetto a τ , risulta per la massa maupertuisiana m , la relazione, traducendo in altra forma l'integrale dell'energia:

$$(7) \quad mc^2 = m_0c^2 + eE \times (P - O),$$

cioè anche:

$$(8) \quad m = m_0 \frac{dt}{d\tau} = m_0 + \frac{e}{c} [E \times (P - O)].$$

2. Veniamo ora al caso in cui il corpuscolo veloce in questione P si muova in un campo magnetico vettorialmente costante H , (che assumeremo diretto come l'asse z di versore K) di una terna di assi cartesiani ortogonali $Oxyz$, ed al quale campo magnetico si sovrapponga l'azione di un campo elettrico centra e E , la cui intensità, quindi, dipenda da un potenziale $U(r)$, funzione della distanza r di $P(xyz)$ dall'origine O del sistema di riferimento.

L'equazione del moto (1) diventa, nel nostro caso:

$$(9) \quad \frac{d}{dt}(mv) = e \left[\frac{dU(r)}{dr} \text{grad } r + Hv \wedge K \right], \quad (H = \text{mod } H);$$

introducendo, poi, il tempo τ , si ha, in luogo della (4), la:

$$(10) \quad m_0^2 \frac{d'P}{d\tau^2} = em \frac{dU(r)}{dr} \text{grad } r + em_0 H \frac{dP}{d\tau} \wedge \mathbf{K}.$$

Moltiplicando ambo i membri della (10) scalarmente per $\mathbf{K}$ e tenendo conto del fatto che è

$$\text{grad } r \times \mathbf{K} = \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial z} = \frac{z}{r},$$

si ottiene l'equazione differenziale:

$$(11) \quad m_0^2 \frac{d^2 z}{d\tau^2} = em \frac{dU}{dr} \cdot \frac{z}{r},$$

la quale è identicamente soddisfatta per $z=0$ e denota, quindi, la possibilità di movimenti del corpuscolo nel piano Oxy . Con riferimento alle coordinate polari r e θ nel piano Oxy , studiamo tale classe di movimenti. Dalla (10), proiettando secondo r e secondo la direzione trasversa, si ottiene il sistema di equazioni differenziali:

$$(12) \quad \begin{cases} m_0^2 \left[\frac{d^2 r}{d\tau^2} - r \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 \right] = em \frac{dU}{dr} + em_0 H r \frac{d\theta}{d\tau}, \\ m_0 \frac{1}{r} \frac{d}{d\tau} \left(r^2 \frac{d\theta}{d\tau} \right) = -eH \frac{dr}{d\tau}. \end{cases}$$

La seconda delle (12) si può scrivere:

$$\frac{d}{d\tau} \left(r^2 \frac{d\theta}{d\tau} \right) + \frac{eH}{m_0} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} r^2 \right) = 0,$$

e fornisce, quindi, l'integrale primo

$$(13) \quad r^2 \frac{d\theta}{d\tau} + \frac{eH}{2m_0} r^2 = C, \text{ (costante arbitraria),}$$

da cui si ricava

$$(13') \quad \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{C}{r^2} - \frac{eH}{2m_0}.$$

Sostituendo, nella prima delle (12), a $\frac{d\theta}{d\tau}$ il valore (13') e ad m il valore $m = \frac{e}{c^2} U(r) + m_0$, che scaturisce dall'integrale dell'ener-

gia, si ricava per $r(\tau)$ l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = \Psi(r), \text{ con } \Psi(r) = \frac{C^2}{r^3} - \frac{e^2 H^2}{4m_0^2} r + \frac{e}{m_0} \left(\frac{e}{c^2} U + m_0 \right) \frac{dU}{dr}.$$

Tale equazione differenziale fornisce, con chiaro significato dei simboli:

$$\tau - \tau_0 = \int \frac{dr}{\pm \sqrt{2 \int \Psi(r) dr + k}}, \quad (k = \text{cost. arb.}).$$

Invertendo la funzione $\tau(r)$, si ha, dunque, r in funzione di τ , dopo di che la (13') con una quadratura, fornisce θ in funzione di τ .

Si può anche osservare quanto segue: l'integrale primo (13) si traduce subito nel seguente integrale primo relativo al tempo t :

$$(14) \quad mr^2 \dot{\theta} = m_0 C - \frac{eH}{2} r^2, \quad \left(\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \right).$$

Ma il sistema (12) ammette anche l'integrale primo relativistico delle forze vive; sussiste cioè la:

$$(15) \quad mc^2 = eU(r) + h, \quad (h = \text{costante}).$$

E la (15) fornisce:

$$(16) \quad v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = c^2 \left[1 - \frac{m_0^2 c^4}{[eU(r) + h]^2} \right], \quad \left(\dot{r} = \frac{dr}{dt}, \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \right).$$

D'altra parte, eliminando m fra la (14) e la (15), si ottiene:

$$(17) \quad r^2 \dot{\theta} = \frac{c^2 \left(m_0 C - \frac{eH}{2} r^2 \right)}{eU(r) + h}.$$

Per mezzo della (17), si elimina, allora, il tempo dalla (16) e si ottiene così l'equazione differenziale della traiettoria:

$$(18) \quad \left(\frac{d \frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{[eU(r) + h]^2 - m_0^2 c^4}{c^2 \left(m_0 C - \frac{eH}{2} r^2 \right)^2}.$$

Da quest'ultima, per separazione di variabili, si ha r in funzione di θ , dopo di che, dalla (17), si ha il tempo t in funzione di θ .

3. Un caso particolare di notevole interesse fisico è rappresentato dallo studio del moto di un elettrone veloce (negativo) in un tubo « moltiplicatore » elettronico, strumento, com'è noto, atto a

moltiplicare, appunto, per successive emissioni secondarie, elettroni originati per effetto termoionico oppure fotoelettrico. In un tubo ad alto vuoto si trovano, a tale fine: una sorgente di elettroni, un certo numero di elettrodi sensibilizzati ed un elettrodo finale collettore. La disposizione geometrica degli elementi costitutivi del tubo moltiplicatore in parola è tale che gli elettroni emessi dalla sorgente, accelerati da un campo elettrico ed orientati da un campo magnetico, vadano ad investire uno degli elettrodi sensibilizzati, dando origine ad un certo numero di elettroni secondari. Attraverso successivi stadi di moltiplicazione, si giunge all'elettrodo collettore, ottenendo notevoli fattori di amplificazione, con fluttuazioni irregolari di corrente molto modeste. Sotto l'aspetto meccanico, schematizzeremo il problema come segue: un elettrone parte, con velocità iniziale praticamente nulla, da un elettrodo piano σ_1 a potenziale $V_{\sigma_1} = 0$, coincidente col piano Oyz di un riferimento cartesiano ortogonale sinistrogiro (per es.) $Oxyz$, e si muove nel campo elettrico, parallelo all'asse Ox , determinato dalla presenza, a distanza l , di un altro elettrodo piano parallelo al primo, nonché in un campo magnetico uniforme di induzione B , parallelo all'asse Oz .

Si supporranno gli elettrodi in parola *praticamente indefiniti* e si prescindere da ogni considerazione di cariche spaziali. L'equazione vettoriale indefinita del moto di un *singolo* elettrone negativo P nei campi di forza considerati è la seguente:

$$(19) \quad \frac{d}{dt}(mv) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dP}{dt} \right) = -e(E + v \wedge B),$$

cioè, introducendo il tempo τ :

$$(20) \quad m_0^2 \frac{d^2 P}{d\tau^2} = -emE - em_0 \frac{dP}{d\tau} \wedge B.$$

Nel caso nostro, è $E_x = -\frac{V}{l}$, $E_y = E_z = 0$. Si hanno, dunque, per il moto in questione, le quattro equazioni differenziali:

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_0^2 \frac{d^2 x}{d\tau^2} = \frac{eV}{l} m - em_0 B \frac{dy}{d\tau}, \\ m_0 \frac{d^2 y}{d\tau^2} = eB \frac{dx}{d\tau}, \\ \frac{d^2 z}{d\tau^2} = 0, \\ m = m_0 \frac{dt}{d\tau} = m_0 + \frac{eV}{lc^2} x, \left(U = \frac{V}{l} x \right). \end{array} \right.$$

Tenuto conto delle condizioni iniziali, la terza delle (21) fornisce subito $z = 0$: dunque il moto avviene nel piano Oxy . La seconda delle (21), con una quadratura e tenendo conto delle condizioni iniziali, fornisce poi:

$$(22) \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{eB}{m_0} x.$$

Sostituendo il valore (22) di $\frac{dy}{d\tau}$ nella prima delle (21), si ottiene:

$$(23) \quad m_0^2 \frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{eV}{l} m - e^2 B^2 x;$$

sostituendo, infine, nella (23) il valore della massa maupertuisiana fornito dalla quarta delle (21), si ha per $x(\tau)$ l'equazione differenziale a coefficienti costanti:

$$(24) \quad \frac{d^2x}{d\tau^2} + \left(\frac{e^2 B^2}{m_0^2} - \frac{e^2 V^2}{l^2 c m_0^2} \right) x = \frac{eV}{lm_0}.$$

Se è:

$$(25) \quad \frac{e^2 B^2}{m_0^2} - \frac{e^2 V^2}{l^2 c m_0^2} = \omega^2 > 0, \quad \left(B > \frac{V}{lc} \right),$$

la (24) ammette l'integrale generale:

$$(26) \quad x(\tau) = \alpha \cos \omega \tau + \beta \sin \omega \tau + \frac{m_0 c^2 V l}{e l^2 c^2 B^2 - e V^2}, \quad (\alpha \text{ e } \beta \text{ cost. arb.}),$$

il quale, tenuto conto delle condizioni iniziali, fornisce, per x in funzione del parametro τ , l'espressione:

$$(27) \quad x(\tau) = \frac{m_0 c^2 V l}{e l^2 c^2 B^2 - e V^2} (1 - \cos \omega \tau).$$

Nota $x(\tau)$, dalla (22) si ottiene $y(\tau)$ per mezzo di una quadratura; si ha:

$$(28) \quad y(\tau) = \frac{l B V c^2}{l^2 c^2 B^2 - V^2} \tau - \frac{l B V c^2}{(l^2 c^2 B^2 - V^2) \omega} \sin \omega \tau.$$

Dalla quarta delle (21) scaturisce poi, tenuto conto della (27), una espressione della massa maupertuisiana m in funzione del tempo τ , cioè:

$$(29) \quad m = m_0 \frac{dt}{d\tau} = m_0 + \frac{m_0 V^2}{l^2 c^2 B^2 - V^2} (1 - \cos \omega \tau);$$

e, con una quadratura, anche l'espressione del tempo t in funzione

del tempo τ , cioè:

$$(30) \quad t = \left[1 + \frac{V^2}{l^2 c^2 B^2 - V^2} \right] \tau - \frac{V^2}{\omega(l^2 c^2 B^2 - V^2)} \operatorname{sen} \omega \tau.$$

Ferriamo la nostra attenzione sulla traiettoria elettronica. Intanto, si vede subito che la distanza lungo l'asse y di due punti consecutivi nei quali si abbia $x = 0$ è

$$(31) \quad \Delta y = \frac{2\pi l c^2 B V}{\omega(l^2 c^2 B^2 - V^2)}.$$

Il valore massimo x_m della coordinata x dell'elettrone risulta poi, evidentemente:

$$(32) \quad x_m = \frac{2m_0 c^2 V l}{e l^2 c^2 B^2 - e V^2}.$$

Il valore critico di B (« induzione critica »), in corrispondenza del quale l'elettrone viene catturato dall'elettrodo affacciato, si ottiene, facendo, nella (32), $x_m = l$. Si ha così:

$$(33) \quad B_{cr} = \sqrt{\frac{2m_0 c^2 V + e V^2}{e l^2 c^2}}.$$

Circa la forma della traiettoria nel piano (x, y) , osserveremo che essa è data da una curva ⁽⁵⁾ che si riduce ad una cicloide ordinaria per

$$\frac{m_0 c^2 V l}{e l^2 c^2 B^2 - e V^2} \rightarrow \frac{l B V c^2}{(l^2 c^2 B^2 - V^2) \omega},$$

cioè per $\frac{e^2 V^2}{l^2 c^2} \rightarrow 0$, cioè, infine, per $c \rightarrow \infty$ (caso della Meccanica classica).

4. Passiamo, infine a studiare il moto di un elettrone negativo veloce nel campo elettrico di un diodo ad elettrodi cilindrici coassiali, cui si sovrapponga un campo « induzione magnetica » assiale.

Prescinderemo da ogni caratterizzazione di carica spaziale; facciamo però presente che nelle equazioni viene pensato il campo

(5) Ponendo $\xi = x$, $\eta = \frac{m_0 \omega}{e B} y = \sqrt{1 - \frac{V^2}{B^2 l^2 e^2}} y$, il punto (ξ, η) descrive una cicloide ordinaria: la curva descritta nel moto relativistico è, dunque, una curva *affine* alla cicloide stessa.

elettrico come dipendente in un modo qualunque dalla variabile radiale r . Il problema interessa, dunque, il *magnetron* ⁽⁶⁾.

Schematizzeremo il problema delle traiettorie dell'elettrone relativistico in parola come segue: lo considereremo mobile nella regione spaziale compresa fra due elettrodi cilindrici coassiali di raggi a e b ($a < b$), dei quali il più interno si trovi a potenziale elettrico nullo ed il più esterno a potenziale elettrico costante V ; l'elettrone stesso parta, con velocità iniziale praticamente nulla, da un punto generico del cilindro interno.

Per effetto del solo campo elettrico, l'elettrone verrebbe accelerato su di una traiettoria rettilinea radiale, fino a raggiungere l'elettrodo cilindrico più esterno. Ma, nella direzione dell'asse z (asse dei due cilindri) agisce un campo « induzione magnetica » B . Sicchè l'equazione vettoriale indefinita relativistica del moto dell'elettrone P è:

$$(34) \quad \frac{d}{dt}(mv) = -e(E + v \wedge B),$$

cioè, introducendo il tempo τ :

$$(35) \quad m_0 \frac{d^2 P}{d\tau^2} = -emE - em_0 \frac{dP}{d\tau} \wedge B.$$

Con riferimento ad un sistema di coordinate cilindriche (r, θ, z) aventi la z , come si è detto, coincidente con l'asse comune dei due elettrodi cilindrici, essendo $E_\theta = E_z = 0$, $B_r = B_\theta = 0$, $E_r = -f(r)$,

(6) A prescindere dallo sviluppo che il magnetron stesso ha avuto dal tipo monoanodico di HULL fino agli odierni magnetron a cavità interessanti la moderna tecnica delle microonde, il tubo elettronico in parola è, essenzialmente, un tubo a due elettrodi in cui il flusso elettronico può essere comandato da un campo di induzione magnetica B prodotto all'esterno del tubo. Per tubi di potenza sufficientemente elevata non v'è dubbio alcuno che occorre fare una teoria relativistica. In ogni caso, non può sfuggire l'opportunità della medesima. Per uno studio del magnetron in condizioni classiche, vedansi le Memorie di POLVANI, ASCOLI e GIACOMINI (Rend. del Sem. mat. e fis. di Milano, 10 (1936)). L'equazione differenziale, cui soddisfa il raggio vettore r dell'elettrone in funzione del tempo t :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{\lambda^2 t}{2r} - \frac{r}{2} + \frac{1}{2r^3},$$

introdotta da POLVANI, è stata studiata, dal punto di vista del comportamento asintotico degli integrali per $t \rightarrow \infty$ da GUIDO ASCOLI (Rend. Ist. Lombardo, 69 (1936)).

(= funzione che supporremo nota di r , ma di forma qualunque), $B_z = B = \text{mod } \mathcal{B}$, la (35) si scinde in un sistema di tre equazioni differenziali, che scriviamo aggiungendovi la nota relazione concernente la massa maupertuisiana:

$$(36) \quad \begin{cases} m_0^2 \left[\frac{d^2 r}{d\tau^2} - r \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 \right] = emf(r) - em_0 B r \frac{d\theta}{d\tau}, & \frac{m_0}{r} \frac{d}{d\tau} \left(r^2 \frac{d\theta}{d\tau} \right) = eB \frac{dr}{d\tau} \\ \frac{d^2 z}{d\tau^2} = 0, & m = m_0 \frac{dt}{d\tau} = m_0 + \frac{e}{c^2} \int f(r) dr. \end{cases}$$

Supporremo che le coordinate iniziali (per $t=0$, è $\tau=0$) dell'elettrone P siano $r=a$, $\theta=0$, $z=0$ e che l'elettrone abbia, come abbiamo detto, velocità iniziale nulla.

La terza delle (36) fornisce, intanto (tenuto conto delle condizioni iniziali) $z=0$ il che significa che i moti dell'elettrone avvengono nei piani perpendicolari all'asse delle z . La seconda delle (36) fornisce poi (tenuto sempre conto delle condizioni iniziali):

$$(37) \quad \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{eB}{2m_0} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right).$$

Sostituendo nella prima delle (36) tale valore di $\frac{d\theta}{d\tau}$ e quello di m fornito dalla quarta delle (36) stesse, si ha:

$$(38) \quad \frac{d^2 r}{d\tau^2} = \Phi(r),$$

dove è:

$$\Phi(r) = \frac{e}{m_0} f(r) \left[1 + \frac{e}{m_0 c^2} \int f(r) dr \right] - \frac{e^2 B^2 r}{4m_0^2} \left(1 - \frac{a^4}{r^4} \right).$$

La (38), tenuto conto del fatto che, per $\tau=0$, è $r=a$, fornisce:

$$(39) \quad \tau = \int_a^r \frac{dr}{\sqrt{2 \int \Phi(r) dr}}.$$

si ha, cioè, invertendo, r in funzione di τ , e dalla (37), con una quadratura, θ in funzione di τ .

Si può anche osservare che l'integrale primo (37) diventa, rispetto al tempo t :

$$(37') \quad m r^2 \dot{\theta} = \frac{eB}{2} r^2 - \frac{eB}{2} a^2.$$

Sussistendo poi l'integrale relativistico delle forze vive, si ha :

$$(40) \quad mc^2 = e \int f(r) dr + h = eU(r) + h, \quad (h = \text{costante});$$

e tenendo conto delle condizioni iniziali (per $t = 0$, $r = a$, $mc^2 = m_0c^2$), risulta $h = m_0c^2 - eU(a)$. Sfruttando gli integrali primi (37') e (40), si giunge all'equazione della traiettoria.

$$(41) \quad \left(\frac{d}{d\theta} \frac{1}{r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{4(eU(r) + m_0c^2 - eU(a))^2 - 4m_0^2c^4}{e^2B^2c^2(r^2 - a^2)^2},$$

dalla quale, per separazione di variabili, si ha r in funzione di θ ; dopo ciò si ottiene, al solito, anche il tempo t in funzione di θ (?). Ma un fatto importante vogliamo segnalare.

Riprendiamo in considerazione l'integrale (37') e l'integrale delle forze vive (40).

Si ricava :

$$(42) \quad \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = c^2 \left[1 - \frac{m_0^2c^4}{[eU(r) + m_0c^2 - eU(a)]^2} \right].$$

È, d'altra parte :

$$(43) \quad \dot{\theta} = \frac{eBc^2(r^2 - a^2)}{2r^2[eU(r) - eU(a) + m_0c^2]}.$$

Sicchè ne consegue :

$$(44) \quad \dot{r}^2 = \frac{4r^2c^2[eU(r) - eU(a)][eU(r) - eU(a) + 2m_0c^2] - e^2B^2c^4(r^2 - a^2)^2}{4r^2[eU(r) - eU(a) + m_0c^2]^2}.$$

Da questa si deduce il valore dell'induzione magnetica *critica* B_0 , sotto l'azione della quale l'elettrone, emesso dal catodo (cilindro interno), non raggiunge l'anodo (cilindro esterno). Si scriverà, per questo, che la velocità radiale $\dot{r}$ si annulla per $r = b$. Con ciò, si otterrà :

$$(45) \quad B_0 = \frac{2b}{c(b-a)(b+a)} \sqrt{[U(b) - U(a)][U(b) - U(a) + \frac{2m_0c^2}{e}]}$$

(?) Naturalmente, una delle approssimazioni dello studio della questione è quella nella quale il campo elettrico venga pensato come l'ordinario campo di un condensatore cilindrico.