Bollettino
Unione Matematica Italiana

Guido Zappa

Sugli automorfismi privi di coincidenze nei gruppi finiti.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.2, p. 154–163.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_2_154_0>

Sugli automorfismi privi di coincidenze nei gruppi finiti.

Nota di GUIDO ZAPPA (a Firenze).

Sunto. - *Si dimostra che esistono gruppi finiti speciali, di classe alta quanto si vuole, dotati di automorfismi privi di coincidenze, e che un gruppo finito supersolubile dotato di automorfismi d'ordine primo privi di coincidenze è speciale.*

Summary. - *It is proved that there are nilpotent finite groups, of arbitrarily high class, possessing automorphisms that leave only unity fixed, and that a finite supersolvable group possessing such an automorphism of prime order, is nilpotent.*

Un automorfismo di un gruppo G verrà detto *senza coincidenze*, o *privo di coincidenze* se lascia fermo soltanto l'elemento unità di G.

Automorfismi di tal tipo sono stati considerati da B. H. NEUMANN [1, 2] il quale ha dimostrato tra l'altro che un gruppo finito dotato di un'automorfismo di ordine 2 senza coincidenze deve essere abeliano, e che un gruppo finito dotato di un automorfismo di ordine 3 senza coincidenze deve essere speciale di classe al più 2, e non è necessariamente abeliano. Si poneva pertanto il problema di vedere se automorfismi privi di coincidenze possano presentarsi anche in gruppi finiti speciali di classe qualunque, o in gruppi finiti non speciali. La presente Nota costituisce un primo contributo alla soluzione di tale problema.

Nel numero 1 si dimostra che per ogni intero positivo n esistono gruppi finiti speciali di classe n dotati di automorfismi senza coincidenze (sia pure di ordine sufficientemente alto). Resta aperta la questione di determinare la massima classe (se esiste) dei gruppi finiti speciali che ammettono un automorfismo senza coincidenze, di ordine assegnato.

Nel n. 2 si dimostra che un gruppo finito supersolubile che ammetta un automorfismo senza coincidenze di ordine primo è necessariamente speciale. Ritengo che si possa eliminare la condizione che l'automorfismo abbia ordine primo, e sostituire la

condizione che il gruppo sia supersolubile almeno con quella che esso sia risolubile.

1. Mostriamo anzitutto che, per ogni intero positivo n, si possono trovare gruppi speciali di classe n dotati di automorfismi senza coincidenze.

Assegnato l'intero n, si fissi un numero primo $p \geqq n+1$, e si consideri un gruppo abeliano elementare H d'ordine p^{n-1}. Indichiamo con $a_2, a_3, \ldots, a_n$ gli elementi di una sua base normale. L'endomorfismo θ di H, definito dalle relazioni:

$$(1) \qquad \begin{aligned} a_i^{\theta} &= a_i a_{i+1} && (i = 2, \ldots, n-1) \\ a_n^{\theta} &= a_n \end{aligned}$$

è un automorfismo, perchè gli elementi $a_2 a_3$, $a_3 a_4, \ldots, a_{n-1} a_n$, a_n, sono indipendenti. Si ha inoltre

$$(2) \qquad \begin{aligned} a_i^{\theta^p} &= a_i a_{i+1}^{p} a_{i+2}^{\binom{p}{2}} \ldots a_n^{\binom{p}{n-1}} && (i = 2, \ldots, n-1) \\ a_n^{\theta^p} &= a_n \end{aligned}$$

Essendo $p \geqq n-1$, per $i \geqq 2$ è $n - i \leqq p-1$, quindi $\binom{p}{2}, \ldots, \binom{p}{n-i}$ sono tutti divisibili per p. Le (2) forniscono allora $a_i^{\theta^p} = a_i$ $(i = 2, \ldots, n)$, onde θ risulta essere un automorfismo di periodo p.

Si costruisca ora l'olomorfo G di H rispetto a $|\theta|$: esso è un gruppo d'ordine p^n, che contiene H, e che può pensarsi generato dagli elementi $a_2, \ldots, a_n$ di H e da un ulteriore elemento a_1 di periodo p, il quale trasformi H in sè e induca in esso l'automorfismo θ. Le relazioni generatrici di G risultano allora le seguenti

$$(3) \qquad \begin{aligned} a_1^p = a_2^p = \ldots = a_n^p = 1, \; a_i a_1 = a_1 a_i a_{i+1} && (i = 2, \ldots, n-1), \\ a_n a_1 = a_1 a_n, \quad a_i a_j = a_j a_i && (i, j = 2, 3, \ldots, n) \end{aligned}$$

Posto inoltre $H_i = |a_{i+1}, \ldots, a_n|$, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, $H_n = 1$, si ha dalle (3):

$$(G, G) = H_2, \; (G, H_2) = H_3, \ldots, (G, H_i) = H_{i+1}, \ldots, (G, H_{n-1}) = H_n = 1$$

onde G risulta di classe $n-1$.

Sia ora x un intero che appartenga, rispetto al mod. p, ad un esponente $\geqq n-1$. Essendo $p \geqq n+1$, basterà assumere x uguale ad una radice primitiva (mod. p).

Dalle (3) segue $a_i^{-1}a_2^{-1}a_ia_1 = a_{i+1}$ $(i = 2,\ 3, \ldots,\ n-1)$. Sarà, come si vede con facili calcoli

$$a_2^{-x}a_1^{-x}a_2^{x}a_1^{x} = a_3^{x^2}h_3 \tag{4}$$

con h_3 conveniente elemento di H_3; e, analogamente

$$(a_3^{x^2}h_3)^{-1}a_1^{-x}(a_3^{x^2}h_3)a_1^{x} = a_4^{x^3}h_4 \tag{5}$$

con h_4 conveniente elemento di H_4; e così via. Resta così definito per via ricorrente l'elemento h_i di H_i $(i = 3, \ldots.\ n-1)$ tale che

$$\left(a_{i-1}^{x^{i-2}}h_{i-1}\right)^{-1}a_1^{-x}\left(a_{i-1}^{x^{i-2}}h_{i-1}\right)a_1^{x} = a_i^{x^{i-1}}h_i\,. \tag{6}$$

Si avrà infine

$$\left(a_{n-1}^{x^{n-2}}h_{n-1}\right)^{-1}a_1^{-x}\left(a_{n-1}^{x^{n-2}}h_{n-1}\right)a_1^{x} = a_n^{x^{n-1}}\,. \tag{7}$$

Si consideri ora l'endomorfismo $\bar{\varphi}$ di H definito dalle relazioni

$$\begin{aligned}
a_2^{\bar{\varphi}} &= a_1^{x} \\
a_3^{\bar{\varphi}} &= a_3^{x^2}h_3 \\
&\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots \\
a_i^{\bar{\varphi}} &= a_i^{x^{i-1}}h_i \qquad\qquad (i = 3, \ldots,\ n-1) \\
a_n^{\bar{\varphi}} &= a_n^{x^{n-1}}
\end{aligned} \tag{8}$$

Si nota subito che $\bar{\varphi}$ è un automorfismo di H, perchè gli elementi a_2^{x}, $a_3^{x^2}h_3, \ldots,$ $a_n^{x^{n-1}}$ sono indipendenti.

Mostriamo ora che esiste un automorfismo φ di G che opera su H come $\bar{\varphi}$, e tale che:

$$a_1^{\varphi} = a_1^{x} \tag{9}$$

In base al corollario contenuto in [4] si ha che, appartenendo a_1 ad un laterale di H in G capace di generare tutto G/H, basterà far vedere che:

a) per ogni elemento d di H, si ha

$$d^{a_1^{x}} = [a_1^{-1}d^{\bar{\varphi}^{-1}}a_1]^{\bar{\varphi}}$$

b)
$$(a_1^{p})^{\bar{\varphi}} = a_1^{xp}$$

Orbene, la validità della *b*) segue in modo immediato, avendosi $a_1^p = a_1^{x^p} = 1$. Per provare la *a*), costituendo gli elementi $\bar{a}_2 = a_2^x$, $\bar{a}_3 = a_3^{x^2} h_3, \ldots, \bar{a}_n = a_n^{x^{n-1}}$ una base normale H, basterà far vedere che è

$$(\bar{a}_i)^{a_1^x} = (a_1^{-1} \bar{a}_i^{\bar{\varphi}^{-1}} a_1)^{\bar{\varphi}}. \tag{10}$$

Ma dalle (8) segue $\bar{a}_i^{\bar{\varphi}^{-1}} = a_i$ $(i = 2, \ldots, n)$, onde la (10) equivale alle

$$\begin{aligned} \bar{a}_i^{a_1^x} &= (a_1^{-1} a_i a_1)^{\bar{\varphi}} = (a_i a_{i+1})^{\bar{\varphi}} = \bar{a}_i \bar{a}_{i+1} \\ \bar{a}_1^{a_1^x} &= (a_1^{-1} a_n a_1)^{\bar{\varphi}} = a_n^{\bar{\varphi}} = \bar{a}_n . \end{aligned} \tag{11}$$

Orbene, in base alle (8), le (11) equivalgono alle (4), (5), (6), (7) e quindi risultano provate.

Resta ora da dimostrare che l'automorfismo φ di G non lascia fermo alcun elemento all'infuori dell'unità. Procediamo per assurdo. Sia m un elemento non identico di G mutato in sè da φ. Esisterà un intero positivo $r \leq n$ tale che m sia in H_{r-1}, ma non in H_r. Allora, si ha che φ deve indurre in H_{r-1}/H_r un automorfismo φ^* che lasci fermo l'elemento non identico mH_r. Quindi essendo H_{r-1}/H_r d'ordine p) φ^* deve essere l'automorfismo identico di H_{r-1}/H_r. D'altra parte, poichè φ porta a_r in $a_r^{x^{r-1}} h_r$, φ^* porta $a_r H_r$ in $a_r^{x^{r-1}} H_r$; e poichè x appartiene (mod. p) ad un esponente $\geq n-1$, è $x^{r-1} \equiv 1 \pmod{p}$ onde $a_r^{x^{r-1}}$ non appartiene ad $a_r H_r$ quindi φ^* non può essere l'automorfismo identico, e pertanto è assurdo supporre che φ muti in sè un elemento di G diverso dall'unità.

Resta pertanto provato il

TEOREMA I. - *Per ogni intero positivo* n, *esistono gruppi finiti speciali di classe* n *dotati di un automorfismo privo di coincidenze.*

2. Proviamo ora il seguente:

LEMMA I. - *Se un gruppo finito* G *d'ordine* n *ammette un automorfismo* φ *senza coincidenze, per ogni numero primo* p_1 *che divide* n *c'è almeno un sottogruppo di Sylow di* G *relativo a* p_1, *mutato in sè da* φ.

Infatti, avendo, φ ordine primo, le sue potenze diverse dall'identità sono, al pari di φ, automorfismi senza coincidenze, onde φ in-

duce sugli $n-1$ elementi di G diversi dall'identità una sostituzione regolare. Ne segue che l'ordine di φ divide $n-1$.

Invece essendo, pel teorema di SYLOW, i sottogruppi di SYLOW relativi a p, tutti coniugati tra loro, il numero di tali sottogruppi divide n, e quindi è primo con $n-1$ e con l'ordine di φ. Ne segue che φ non può determinare sull'insieme formato dai sottogruppi di SYLOW di G relativi a p, una sostituzione regolare, onde una potenza di φ diversa dall'identità deve mutare in sè almeno un sottogruppo di SYLOW, S, relativo a p,. Avendo φ ordine primo, anche φ deve di conseguenza mutare in sè S. Il lemma è quindi provato.

Dimostriamo ora il

LEMMA II. - *Se* G *è un gruppo finito e* φ *un suo automorfismo senza coincidenze d'ordine* r, *si ha, comunque si scelga l'elemento* g *di* G:

$$gg^{\varphi}g^{\varphi^2}\dots g^{\varphi^{r-1}} = 1 \tag{1}$$

Notiamo anzitutto che, se esiste un elemento x di G tale che $x^{-1}x^{\varphi} = g$, per g vale la (1). Infatti, si ha, essendo $x^{\varphi^r} = x$,

$$(x^{-1}x^{\varphi})(x^{-1}x^{\varphi})^{\varphi}(x^{-1}x^{\varphi})^{\varphi^2}\dots(x^{-1}x^{\varphi})^{\varphi^{r-1}} =$$

$$= x^{-1}x^{\varphi}(x^{\varphi})^{-1}x^{\varphi^2}(x^{\varphi^2})^{-1}\dots(x^{\varphi^{r-1}})^{-1}x = 1.$$

Basterà ora far vedere che ogni elemento di G può mettersi sotto la forma $x^{-1}x^{\varphi}$, con x conveniente elemento di G. Orbene, notiamo che se è $x^{-1}x^{\varphi} = y^{-1}y^{\varphi}$, segue $x = y$. Infatti, da $x^{-1}x^{\varphi} = y^{-1}y^{\varphi}$ si ricava $yx^{-1} = (yx^{-1})^{\varphi}$, onde, essendo φ privo di coincidenze, deve aversi $x = y$. L'applicazione $x \to x^{-1}x^{\circ}$ (x in G) è quindi biunivoca e pertanto, essendo G finito, applica G su tutto G. Di conseguenza ogni elemento di G può porsi nella forma $x^{-1}x^{\varphi}$, e, per quanto si è visto, esso verifica la (1).

Diamo ora il

LEMMA III. - *Se* G *è un gruppo d'ordine* $p^{\alpha}q^{\beta}$, *in cui ogni elemento ha per ordine la potenza di un numero primo*, G *non può ammettere automorfismi d'ordine primo senza coincidenze.*

Infatti se G ammette un automorfismo φ d'ordine primo r, senza coincidenze, si ha $r \neq p$, $r \neq q$, perchè φ deve indurre sui $p^{\alpha}q^{\beta} - 1$ elementi di G diversi dall'unità una sostituzione regolare, onde r deve dividere $p^{\alpha}q^{\beta} - 1$ e quindi essere primo con p e q.

In base alla teoria dell'ampliamento può allora costruirsi un gruppo L avente un sottogruppo normale $\bar{G}$ isomorfo a G, tale che $L/\bar{G}$ sia ciclico d'ordine r, si abbia $L = \bar{G}\bar{\Phi}$, con $\bar{\Phi} \cap \bar{G} = 1$, e che, detto $\bar{\varphi}$ un generatore di $\bar{\Phi}$ (che è necessariamente ciclico d'ordine r) $\bar{\varphi}^x$ induca in $\bar{G}$ l'automorfismo corrispondente all'automorfismo φ^x di G. Poichè φ^x è senza coincidenze, $\bar{\varphi}^x$ non può essere permutabile con alcun elemento, non identico, di G, onde L non contiene elementi d'ordine divisibile contemporaneamente per p ed r, nè per q ed r. D'altra parte L non può contenere elementi d'ordine divisibile per p e q perchè simili elementi dovrebbero essere in G, il quale invece, essendo isomorfo a G, è somma dei suoi sottogruppi di SYLOW. Ne segue che L risulta un gruppo risolubile somma dei suoi sottogruppi di SYLOW, e di ordine divisibile per almeno tre fattori primi, il che è assurdo, in base ad un risultato di ZACHER [3].

Proviamo ancora il

LEMMA IV. – *Se* G *è un gruppo supersolubile d'ordine* $p^\alpha q^\beta (p > q)$ *dotato di un automorfismo* φ *senza coincidenze, e, detto* N *il sottogruppo caratteristico di* G *d'ordine* p^γ, *si ha che* φ *non muta in sè alcun sottogruppo normale proprio di* G *contenuto propriamente in* N *o contenente propriamente* N, G *è speciale.*

Notiamo anzitutto che, poichè φ muta N in sè, N deve essere abeliano elementare, altrimenti esso conterrebbe un sottogruppo proprio caratteristico il quale necessariamente sarebbe mutato in sè da φ, contro l'ipotesi. Per analoga ragione deve essere abeliano elementare G/N.

Sia S un sottogruppo di SYLOW di G d'ordine q^β, e sia d un suo elemento arbitrario. Mostriamo ora che, *comunque si prenda un elemento* l *di* N, *si ha* $d^{-1} l\, d = l^x$, *con* x *indipendente da* l. Se è $\alpha = 1$, e quindi N è ciclico d'ordine p, ciò è evidente. Supponiamo pertanto $\alpha > 1$.

Sia P un sottogruppo normale minimo di G contenuto in N; essendo G supersolubile, P ha ordine p, quindi è ciclico. Essendo $N \supset P$, si ha che, in base alle ipotesi, P non può essere mutato in sè da φ, e pertanto, avendo φ ordine primo, nemmeno da alcuna potenza non identica di φ. Detto r l'ordine di φ, si ha allora che i sottogruppi $P_0 \equiv P$, $P_1 \equiv P^\varphi, \ldots, P_{r-1} = P^{\varphi^{r-1}}$ sono tutti distinti tra loro. Sia h un generatore di P, e si ponga $h^{\varphi^i} = h_i$ $(i = 0, 1, \ldots, r-1)$. Per il lemma II si ha allora $h_0\, h_1\, h_2 \ldots h_{r-1} = 1$. Inoltre $P_0 \cup P_1 \cup \ldots \cup P_{r-1}$ è mutato in sè da φ, quindi coincide con N.

Ciascuno dei sottogruppi P_i $(i = 1, \dots, r-1)$, è, al pari di P, normale in G, onde si ha $d^{-1}h_i\, d = h_i^{x_i}$ con x_i intero conveniente tale che $0 < x_i < p$. Suddividiamo ora gli elementi $h_0, h_1, \dots, h_{r-1}$ in classi, in modo da porre nella stessa classe due elementi h_i, h_j quando e solo quando è $x_i = x_j$. Indichiamo con $C_1, C_2, \dots, C_t$ tali classi, e con k_i il prodotto degli elementi della classe C_i $(i = 1, \dots, t)$. Si avrà allora $d^{-1}k_i d = k_i^{y_i}$, ove, detti $h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_s}$ gli elementi di C_i, si ha $x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_s} = y_i$. Sarà inoltre $y_i \neq y_j$ per $i \neq j$. Da $h_0\, h_1 \dots h_{r-1} = 1$ segue poi $k_1\, k_2 \dots k_t = 1$. Gli elementi $k_1, k_2, \dots, k_t$ non sono indipendenti, onde si potranno trovare tra essi un certo numero u di elementi, $k_{j_1}, k_{j_2}, \dots, k_{j_u}$ con $u < t$, tale che ogni altro k_i e quindi ogni elemento di N dipenda da essi. Vogliamo provare che è $u = 1$. Notiamo a tal fine che se è $u > 1$, avendosi $y_{j_a} \neq y_{j_b}$ per $a \neq b$, nessun altro elemento di N all'infuori delle potenze di $k_{j_1}, k_{j_2}, \dots, k_{j_u}$ può essere trasformato da d in una propria potenza; e ciò contrasta col fatto che, essendo $t > u$, deve esistere almeno uno degli elementi $k_1, k_2, \dots, k_t$ diverso dagli elementi $k_{j_1}, k_{j_2}, \dots, k_{j_u}$ e dalle loro potenze, e che ognuno degli elementi $k_1, k_2, \dots, k_t$ è trasformato da d in una propria potenza. Dovrà quindi aversi $u = 1$, onde gli elementi $k_1, k_2, \dots, k_t$ sono tutti potenza di uno qualunque di essi. Dovrà allora aversi anche $t = 1$, perchè, se fosse $t \geq 2$, si avrebbe $k_2 = k_1^c$, con c intero conveniente primo con p, onde $k_2^{y_2} = d^{-1}k_2 d = d^{-1}k_1^c d = k_1^{y_1 c} = k_2^{y_1}$ contro l'ipotesi $y_1 \neq y_2$. Essendo $t = 1$, si ha che le classi $C_1, \dots, C_t$ si riducono ad una sola, onde, fissato d, per ogni valore di i tra 0 ed $r-1$ si ha $d^{-1}h_i\, d = h_i^x$, con x indipendente da i. Preso un qualunque elemento l di N, si ha che l si può esprimere mediante $h_0, h_1, \dots, h_{r-1}$, onde è anche $d^{-1}l\, d = l^x$, con x indipendente da l, come si era affermato.

Si ha allora che se un elemento d di S è permutabile con un elemento di N, esso è permutabile con ogni elemento di N, e quindi appartiene al centralizzante di N. Infatti, se d è permutabile con un elemento l di N, si ha $d^{-1}l\, d = l$, onde $x = 1$, e quindi d trasforma ogni elemento di N in sè.

Pertanto, se N è centralizzante di se stesso in G, nessun elemento di S può essere permutabile con alcun elemento di N. Quanto detto per S vale anche per ogni altro sottogruppo di ordine q^β di G, onde G non può contenere elementi il cui ordine sia divisibile per p e per q. Se N è centralizzante di se stesso, ogni elemento di G ha quindi per ordine la potenza di un numero primo. Ma in questo caso, in base al lemma III, G non può ammettere automorfismi d'ordine primo senza coincidenze, contro l'ipotesi.

Ne segue che il centralizzante di N deve essere più ampio di N; e poichè esso è, al pari di N, caratteristico, quindi mutato in sè da φ, esso deve, per ipotesi, coincidere con G. Si ha quindi $G = N \times S$, onde G risulta speciale, c. d. d.

3. Siamo ora in grado di dimostrare il

TEOREMA II. – *Un gruppo finito supersolubile* G *d'ordine* n, *il quale ammetta un automorfismo* φ *d'ordine primo senza coincidenze, è speciale.*

Poichè ogni gruppo d'ordine primo è speciale, possiamo dimostrare il teorema per induzione rispetto al numero dei fattori primi (distinti o no) che compaiono nell'ordine del gruppo. Supporremo pertanto il teorema vero per ogni gruppo il cui ordine divida n.

Diremo *sottogruppo normale-φ-ammissibile* di G un sottogruppo normale di G che sia mutato in sè dall'automorfismo φ, e diremo *sottogruppo normale-φ-ammissibile-massimo (minimo)* un sottogruppo normale-φ-ammissibile diverso da G (diverso dal sottogruppo unità), che non sia contenuto propriamente in (non contenga propriamente) altro sottogruppo normale φ-ammissibile proprio.

Sia $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ l'ordine di G ($p_1 > p_2 > \dots > p_r$ numeri primi distinti). Essendo G supersolubile v'è in G un unico sottogruppo [5] d'indice $p_r^{\alpha_r}$ necessariamente caratteristico, quindi normale-φ-ammissibile. Pertanto G deve avere un sottogruppo normale-φ-ammissibile-massimo il cui indice è potenza di p_r. Sia M un tale sottogruppo. Poichè l'ordine di M divide l'ordine di G, e φ, mutando M in sè, subordina in esso un automorfismo d'ordine primo senza coincidenze, per l'ipotesi alla base del processo d'induzione, M è speciale. Inoltre G/M non può contenere sottogruppi caratteristici propri, perchè se H/M fosse un eventuale sottogruppo caratteristico proprio di G/M, H sarebbe un sottogruppo caratteristico proprio di G, quindi anche normale-φ-ammissibile, più ampio di M, contro l'ipotesi. Pertanto G/M deve essere abeliano elementare (d'ordine una potenza di p_r).

Poichè M è speciale, i suoi sottogruppi di SYLOW sono caratteristici in M, quindi, essendo M normale-φ-ammissibile, sono anch'essi normali-φ-ammissibili e tali sono anche i loro centri. Pertanto, in corrispondenza ad ognuno dei numeri primi $p_1, p_2, \dots, p_r$ che divida l'ordine di M, dovrà esistere in M un sottogruppo abeliano elementare normale-φ-ammissibile-minimo di G,

il cui ordine è potenza di quel numero primo. Se $r = 1$, G è un p-gruppo, quindi speciale. Possiamo pertanto supporre $r \geqq 2$.

Distinguiamo ora due casi:

a) M è esso stesso un sottogruppo normale-φ-ammissibile -minimo.

b) M non è un sottogruppo normale-φ-ammissibile-minimo.

Nel caso *a*) M deve essere un p-gruppo, e dovendo l'indice di M in G essere una potenza di p_r, dovrà aversi $r = 2$, ed M coinciderà col sottogruppo di SYLOW di G d'ordine $p_1^{\alpha_1}$. Pertanto M risulta caratteristico in G, ed essendo normale-φ-ammissibile -minimo, non potrà contenere propriamente sottogruppi caratteristici propri di G, onde risulterà abeliano elementare. In tal caso G verifica le condizioni del lemma IV. e quindi risulta speciale.

Nel caso *b*), sia R un sottogruppo normale-φ-ammissibile minimo contenuto in M. Si noti che φ non può mutare in sè un laterale Rg di R in G diverso da R. Infatti, in tal caso φ, avendo ordine primo e non potendo mutare in sè alcun elemento di Rg, dovrebbe determinare sugli elementi di Rg una sostituzione regolare onde il suo ordine dovrebbe dividere l'ordine di R, e quindi quello di G, mentre sappiamo che l'ordine di φ è primo con quello di G.

Ne segue che φ induce in G/R un automorfismo senza coincidenze, ancora d'ordine primo, onde, per l'ipotesi a base del processo d'induzione, G/R è speciale. Pertanto, presi in G due sottogruppi di SYLOW S_1, S_2 relativi a numeri primi distinti, e detti g_1, g_2 due elementi situati il primo in S_1, l'altro in S_2, si ha che, nell'omomorfismo di G su G/R, a g_1 e g_2 corrispondono due elementi g_1', g_2' appartenenti a due sottogruppi di SYLOW di G/R relativi a numeri primi distinti. Poichè G/R è speciale, si ha $g_1'g_2' = g_2'g_1'$, quindi $g_1g_2 = g_2g_1\, c$, con c in R.

Se ora l'ordine di M è divisibile per almeno due numeri primi p_i e p_j, M contiene, come si è visto sopra, almeno due sottogruppi normali-φ-ammissibili minimi di G, R_i e R_j aventi per ordine l'uno una potenza di p_i, l'altro di p_j.

Si ha allora $R_i \cap R_j = 1$, onde gli elementi g_1, g_2 di cui sopra, sono tali che $g_1g_2 = g_2g_1c$, con c in R_i e in R_j, cioè con $c = 1$. Ne segue che in G due elementi appartenenti a sottogruppi di SYLOW d'ordine diverso sono permutabili, onde G risulta speciale.

Resta da esaminare quindi il caso in cui M è un p-gruppo, quindi necessariamente di ordine $p_1^{\alpha_1}$; G avrà di conseguenza ordine $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$. Sia R un sottogruppo abeliano elementare normale-φ-ammissibile-minimo di G contenuto in M. Sarà $R \subset M$, altrimenti si cadrebbe nel caso a), e quindi R avrà ordine p_1^{β} con $\beta < \alpha_1$.

Pel lemma I, deve esistere un sottogruppo di SYLOW S_2 d'ordine $p_2^{\alpha_2}$ mutato in sè da φ. Anche $R \bigcup S_2$ dovrà essere mutato in sè da φ; ed essendo R normale in G, $R \bigcup S_2 = RS_2$ avrà ordine $p_1^{\beta}p_2^{\gamma_2}$, onde $R \bigcup S_2 \subset G$. Per l'ipotesi a base del processo d'induzione, $R \bigcup S_2$ deve essere speciale, onde R, essendo abeliano elementare, deve essere nel centro di $R \bigcup S_2$.

Siano ora g_1 un elemento arbitrario di M, e g_2 un elemento arbitrario di S_2. Poichè G/R è speciale, deve aversi $g_1g_2 = g_2g_1c$ con c in R, cioè $g_2^{-1}g_1g_2 = g_1c$, $g_2^{-2}g_1g_2^2 = g_2^{-1}g_1g_2g_2^{-1}cg_2$, ma essendo c nel centro di $R \bigcup S_2$, g_2 deve essere permutabile con c, onde è $g_2^{-2}g_1g_2^2 = g_1c^2, \ldots, g_2^{-x}g_1g_2^x = g_1c^x, \ldots, g_2^{-p_2}g_1g_2^{p_2} = g_1c^{p_2}$. Ma g_2 ha ordine p_2, perchè S_2 è isomorfo a G/M che è abeliano elementare. Pertanto è $g_2^{p_2} = 1$, quindi $g_1c^{p_2} = g_2^{-p_2}g_1g_2^{p_2} = g_1$. Di qui segue $c^{p_2} = 1$; e poichè ogni elemento non identico di R ha periodo p_1, deve essere $c = 1$, cioè g_1 permutabile con g_2. quindi G è speciale. Il teorema risulta quindi in ogni caso dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

[1] B. H. NEUMANN, *On the commutativity of addition*, « J. London math Soc. », 15 (1940), pp. 203-208.

[2] B. H. NEUMANN, *Groups with automorphisms that leave only the neutral element fixed*, « Archiv der Math, », 7 (1956), pp. 1-5.

[3] G. ZACHER, *Sull'ordine di un gruppo finito risolubile somma dei suoi sottogruppi di Sylow*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei », 20 (1956), pp. 171-174.

[4] G. ZAPPA, *Sull'ampliamento degli automorfismi*, « Rend. Sem. mat. Univ. Roma », (4) 3 (1939), pp. 133-138.

[5] G. ZAPPA, *Sui gruppi supersolubili*, « Rend. Sem. mat. Univ. Roma », (4) 2 (1938), pp. 323-330.