BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Romolo Musti, Ettore Buttafuoco

Sui subreticoli distributivi dei reticoli modulari.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.4, p. 584–587.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_4_584_0>

Sui subreticoli distributivi dei reticoli modulari. (*)

Nota di ROMOLO MUSTI e di ETTORE BUTTAFUOCO (a Palermo)

Sunto. - *In questa nota gli A.A. studiano le condizioni necessarie e sufficienti date da* BJARNI JÒNSSON (1) *affinchè un sottoinsieme X non vuoto di un reticolo modulare A generi un sottoreticolo distributivo.*

Dimostriamo che, se X è composto da n elementi, una parte delle condizioni di JONSSON *è conseguenza delle rimanenti.*

1. – BJARNI JÒNSSON, nella nota citata in (1), ha dimostrato che: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sottoinsieme non vuoto* X *di un reticolo modulare* A *generi un sottoreticolo*

(5) È da notare che abbiamo supposto ritardate solo le q_i; se fossero ritardate anche le $\dot{q}_i$ l'estensione a questo caso del teorema di reciprocità sarebbe immediata.

(*) Il problema, al quale la presente nota dà una prima risposta, è stato posto agli A.A. nel «Seminario di Geometria superiore e Algebra moderna» di Palermo.

(1) *Distributive sublattices of a modular lattice,* Proceedings of the American Mathematical Society, 1955, pp. 682-88.

distributivo è che:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) \prod_{j=1}^{n} y_j = \sum_{i=1}^{m} \left(x_i \prod_{j=1}^{n} y_j\right) \tag{1}$$

ogni qualvolta m ed n sono interi e positivi e

$$x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n \in X.$$

Lo stesso autore, studiando casi particolari nei quali gli elementi del sottoinsieme X siano in numero di 3 e 4, fa notare che le condizioni fornite dal teorema suddetto non sono indipendenti.

Più precisamente, nel caso in cui X comprenda tre elementi x, y, z, le condizioni date dal suo teorema possono essere sostituite dalla sola condizione

$$(x + y)z = xz + yz.$$

Nel caso in cui X comprenda 4 elementi x, y, z, u, le (1) possono essere sostituite dalle sei condizioni seguenti:

$$\begin{array}{rcl} (y + z)u = yu + zu & , & (z + u)x = zx + ux \\ (u + x)y = uy + xy & , & (x + y)z = xz + yz \\ (x + y + z)u = xu + yu + zu & , & xyz + u = (x + u)(y + u)(z + u) \end{array}$$

l'ultima delle quali è duale della precedente e non compresa nelle (1).

Notiamo però che quest'ultima può essere sostituita dalla

$$(x + y)zu = xzu + yzu$$

come si vede con una semplice dimostrazione.

2. - Ci proponiamo ora di ridurre il numero delle condizioni date dallo Jònsson nel caso in cui X comprenda un numero finito qualunque n di elementi, in modo che i criteri dati nei casi particolari precedenti possano dedursi da un criterio più generale, quando si ponga $n = 3,4$.

Dimostreremo che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un insieme X *di* n *elementi di un reticolo modulare, tali che ad* $\mathrm{n}-1$ *ad* $\mathrm{n}-1$ *generino sottoreticoli distributivi, generi un sottoreticolo distributivo è che* *siano soddisfatte le seguenti ulteriori* n — 2 *condizioni;*

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})x_n = x_1x_n + x_2x_n + \dots + x_{n-1}x_n$$

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2})x_{n-1}x_n = x_1x_{n-1}x_n + x_2x_{n-1}x_n + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n$$

. . . .

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_r)x_{r+1}x_{r+2} \dots x_n = \tag{2}$$

$$= x_1x_{r+1}x_{r+2} \dots x_n + x_2x_{r+1}x_{r+2} \dots x_n + \dots + x_rx_{r+1}x_{r+2} \dots x_n$$

. . . .

$$(x_1 + x_2)x_3x_4 \dots x_n = x_1x_3x_4 \dots x_n + x_2x_3x_4 \dots x_n$$

Basta fare vedere in virtù del teorema di Jònsson che, supposta vera una delle precedenti relazioni sono vere tutte le altre che da essa deduconsi per permutazioni degli indici 1, 2, ..., n (nelle ipotesi del nostro enunciato).

Supposta vera la generica (2), che per comodità scriveremo:

$$(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_r})\, y_{j_1}y_{j_2} \dots y_{j_s} =$$

$$= x_{i_1}y_{j_1}y_{j_2} \dots y_{j_s} + x_{i_2}y_{j_1}y_{j_2} \dots y_{j_s} + \dots + x_{i_r}y_{j_1}y_{j_2} \dots y_{j_s}, \qquad (r + s = n).$$

dimostreremo per es. la seguente uguaglianza:

$$(y_{j_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_r})x_{i_1}y_{j_2} \dots y_{j_s} =$$

$$= y_{j_1}x_{i_1}y_{j_2} \dots y_{j_s} + x_{i_2}x_{i_1}y_{j_2} \dots y_{j_s} + \dots + x_{i_r}x_{i_1}x_{j_2} \dots y_{j_s}.$$

Osserviamo che per la proprietà associativa, per l'ipotesi induttiva e per la modularità si ha successivamente:

$$(y_{j_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_r})\, x_{i_1} y_{j_2} \dots y_{j_s} =$$

$$= (y_{j_1}y_{j_2} \dots y_{j_s} + x_{i_2}y_{j_2} \dots y_{j_s} + \dots + x_{i_r}y_{j_2} \dots y_{j_s})x_{i_1} \leq$$

$$\leq (y_{j_1}y_{j_2} \dots y_{j_s} + x_{i_2}y_{j_2} \dots y_{j_s} + \dots + x_{i_r}y_{j_2} \dots y_{j_s})(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_r}) =$$

$$= x_{i_2}y_{j_2} \dots y_{j_s} + \dots + x_{i_r}y_{j_2} \dots y_{j_s} + y_{j_1}y_{j_2} \dots y_{j_s}(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_r}) =$$

$$= x_{i_2}y_{j_2} \dots y_{j_s} + \dots + x_{i_r}y_{j_2} \dots y_{j_s} + y_{j_1}y_{j_2} \dots y_{j_s}x_{i_1} +$$

$$+ y_{j_1}y_{j_2} \dots y_{j_s}x_{i_2} + \dots + y_{j_1}y_{j_2} \dots y_{j_s}x_{i_r} =$$

$$= x_{i_2}y_{j_2} \dots y_{j_s} + \dots + x_{i_r}y_{j_2} \dots y_{j_s} + y_{j_1}y_{j_2} \dots y_{j_s}x_{i_1}.$$

Da qui segue: ([2])

$$(y_{j_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_r}) x_{i_1} y_{j_2} \ldots y_{j_s} =$$

$$= (x_{i_2} y_{j_2} \ldots y_{j_s} + \ldots + x_{i_r} y_{j_2} \ldots y_{j_s} + y_{j_1} y_{j_2} \ldots y_{j_s} x_{i_1}) x_{i_1} =$$

$$= y_{j_1} y_{j_2} \ldots y_{j_s} x_{i_1} + x_{i_1} (x_{i_2} y_{j_2} \ldots y_{j_s} + \ldots + x_{i_r} y_{j_2} \ldots y_{j_s})$$

e per l'ipotesi induttiva segue:

$$(y_{j_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_r}) x_{i_1} y_{j_2} \ldots y_{j_s} =$$

$$= y_{j_1} y_{j_2} \ldots y_{j_s} x_{i_1} + x_{i_1} x_{i_2} y_{j_2} \ldots y_{j_s} + \ldots + x_{i_1} x_{i_r} y_{j_2} \ldots y_{j_s} .$$

Resta pertanto provato che nell' ipotesi induttiva in cui ci siamo posti, la relazione (2) congloba le $\dfrac{n!}{r!\ s!}$ condizioni di Jònsson che da essa si ottengono per sostituzione sugli $x_1, \ldots, x_r$. $y_1, \ldots, y_s$ (si escludono quelle che mutano solo l'ordine delle x o delle y).

Le $n-2$ condizioni stabilite dal nostro teorema conglobano quindi:

$$\sum_{s=2}^{n-} \frac{n!}{s!\ (n-s)!}$$

delle condizioni di Jònsson.

Con procedimento induttivo si stabilisce inoltre che il numero delle condizioni delle quali si parla nell'enunciato del precedente teorema è

$$N = \binom{n}{3} + 2\binom{n}{4} + \ldots + (n-2)\binom{n}{n}.$$

Resta ancora aperto il seguente problema: *stabilire se le* N *condizioni di cui sopra sono, o non, indipendenti.*

([2]) Infatti ponendo:

$$A = (y_{j_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_r}) y_{j_2} \ldots y_{j_s}$$

e

$$B = x_{i_2} y_{j_2} \ldots y_{j_s} + \ldots + x_{i_r} y_{j_2} \ldots y_{j_s} + y_{j_1} y_{j_2} \ldots y_{j_s} x_{i_1}$$

si ha

$$A x_{i_1} \leq B$$

ed anche

$$B \leq A$$

perchè ogni «addendo» di B è contenuto tanto in $y_{j_1} \ldots y_{j_s}$ quanto in

$$(y_{j_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_r})$$

perciò

$$B x_{i_1} = A x_{i_1} .$$