Bollettino Unione Matematica Italiana

Federico Lombardi

Sugli insiemi analitici dell'S_r euclideo.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.4, p. 578–581.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_4_578_0>

Sugli insiemi analitici dell' S_r euclideo ([1]).

Nota di FEDERICO LOMBARDI (a Bari)

Sunto. - *Si dimostra che ogni insieme analitico è lebesghiano (nel senso di* M. PICONE*) rispetto ad ogni massa elementare.*

1. Gli insiemi analitici di cui intendiamo parlare possono esser considerati, com'è ben noto, quali enti più generali degli insiemi boreliani ([2]). Mi sono chiesto se essi possano essere considerati anche come più generali degli *insiemi lebesghiani* del prof. M. PICONE ([3]).

Scopo del presente breve lavoro è di rispondere negativamente a questa domanda, d'indicare cioè come si possa dimostrare che *ogni insieme analitico è lebesghiano rispetto ad ogni massa elementare.* Darò propriamente solo delle indicazioni, svolgendo per esteso la dimostrazione di una proposizione (il lemma del n. 3) che mi sembra costituire un passaggio obbligato — tutt'altro che banale — lungo una via già segnata, per il resto, da insigni analisti.

2. Diciamo che un insieme N è *analitico*, quando esso è il nucleo di un sistema determinante d'insiemi *chiusi* $E_{n_1 n_2 \dots n_k}$, e scriviamo

$$N = \sum_{n_1 n_2 \dots} E_{n_1} E_{n_1 n_2} E_{n_1 n_2 n_3} \dots \tag{1}$$

($k = 1, 2, \dots$; $n_1, n_2, \dots, n_k$ sono k indici, ciascuno dei quali percorre la successione $1, 2, \dots$ indipendentemente da ogni altro) ([4]).

([1]) Questa nota contiene la parte più importante della mia tesi di laurea in Scienze Matematiche, svolta presso la cattedra di Analisi Matematica dell'Università di Bari (Relatore prof. T. VIOLA).

([2]) Cfr. W. SIERPIŃSKI, *Les ensembles projectifs et analytiques*, (Parigi 1950), pp. 38, 48: in questa pubblicazione il lettore potrà trovare, sinteticamente riassunte, le proprietà principali che ci interessano intorno agli insiemi analitici.

([3]) Cfr. M. PICONE e T. VIOLA, *Lezioni sulla teoria moderna dell'integrazione*, (Torino 1952) p. 111 e segg. La terminologia e il simbolismo di questo trattato sono supposti noti al lettore per tutto ciò che riguarda gli insiemi lebesghiani.

([4]) Cfr. loc. cit. alla nota ([2]) pp. 33-34. L'Autore assume ivi, come insiemi $E_{n_1 n_2 \dots n_k}$ gli *intervalli* dell' S_r. Si dimostra però facilmente che, Per dimostrare la nostra tesi (n. 1), possiamo seguire sostanzialmente un ragionamento di H. HAHN e A. ROSENTHAL [5]: ciò comporta però una metodologia particolare di cui dobbiamo preventivamente accertarci nei dettagli.

Prima di tutto sembra necessario restringere le nostre considerazioni a sistemi determinanti d'insiemi chiusi *tutti contenuti in uno stesso intervallo.* Ciò è perfettamente lecito. Infatti, se $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \ldots \subset \Delta_n \subset \ldots$ è una successione d'intervalli tendente allo S_r, moltiplicando per Δ_n i due membri della (1) si ha

$$N\Delta_n = \sum_{n_1 n_2 \ldots} E_{n_1}\Delta_n)(E_{n_1 n_2}\Delta_n)(E_{n_1 n_2 n_3}\Delta_n)\ldots$$

Ma i prodotti $E_{n_1 n_2 \ldots n_k}\Delta_n$ (fermo restando n) sono insiemi chiusi costituenti evidentemente anch'essi un certo sistema determinante, il cui nucleo è $N\Delta_n$. Dunque, essendo

$$N = \sum_n^{1,\infty} N\Delta_n ,$$

per dimostrare che N è lebesghiano rispetto ad una qualunque prefissata massa elementare $\alpha(T)$, basta dimostrare che è lebesghiano il generico nucleo *limitato* $N\Delta_n$.

Introduciano ora il concetto di «*involucro lebesghiano*» di un insieme limitato E del tutto arbitrario [6]: esso è *un insieme lebesghiano* E* *contenente* E, *la cui massa, rispetto alla* α(T) *prefissata, è uguale all'estremo inferiore delle masse di tutti gli insiemi lebesghiani* L *che contengono* E, *cioè*

$$E^* \supseteq E, \qquad m_\alpha E^* = \operatorname*{estr.\,inf.}_{L} \{ m_\alpha L \} .$$

Di tali involucri lebesghiani (dello stesso insieme E) ne esistono infiniti: fra essi sono naturalmente da annoverarsi anche dei boreliani particolarmente semplici, ottenibili — come facilmente si riconosce — come limiti di opportune successioni d'insiemi aperti contenenti E.

supponendo più generalmente gli $E_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ chiusi, si enuncia una definizione esattamente equivalente.

(5) Cfr. H. HAHN e A. ROSENTHAL, *Set functions* (Albuquerque, New Mexico 1948, p. 71, teor. n. 6.3.5).

(6) Tale concetto è l'analogo di quello che nel loc. cit. alla nota (5) p. 68, è chiamato «*measure-cover*» di E.

Sugli involucri lebesghiani sono necessarie, al nostro scopo, varie proposizioni, le più semplici delle quali (e le cui dimostrazioni crediamo di poter lasciare al lettore) sono le seguenti:

a) *Se* M *è un qualunque insieme lebesghiano contenente* E, *anche il prodotto* ME* *è un involucro lebesghiano di* E.

b) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè* E *sia lebesghiano, è che sia*

$$m_\alpha E = m_\alpha E^* .$$

c) *Se* E_1^*, E_2^* *sono due involucri lebesghiani di uno stesso insieme* E, *si ha*

$$m_\alpha (E_1^* - E_2^*) = 0.$$

Ma della seguente proprietà che costituisce, a nostro parere, il vero punto nevralgico della teoria, daremo ora interamente la dimostrazione, come già abbiamo detto.

3. Lemma. - *Se*

$$E_1 , E_2 , \ldots , E_n , \ldots$$

è una successione d'insiemi tutti contenuti in uno stesso intervallo, e se

$$E_1^*, E_2^*, \ldots , E_n^*, \ldots$$

è una successione dei rispettivi involucri lebesghiani, la somma $\sum_n^{1,\infty} E_n^*$ *è un involucro lebesghiano della somma* $E = \sum_n^{1,\infty} E_n$ (7).

Dimostrazione. - Osserviamo anzitutto che $\sum_n^{1,\infty} E_n^*$ è un insieme lebesghiano, perchè somma d'un'infinità numerabile d'insiemi lebesghiani, e che $\sum_n^{1,\infty} E_n^* \supseteq E$, perchè $E_n^* \supseteq E_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Proponiamoci poi di dimostrare che, se E^* è un qualunque involucro lebesghiano di E, risulta

$$m_\alpha \sum_n^{1,\infty} E_n^* = m_\alpha E^* .$$

Poniamo infatti $M_n = E^* E_n^*$, per cui evidentemente

$$E_n \subseteq E_n^*, \ E_n \subseteq E^*, \ M_n \subseteq E_n , \ \text{dunque} \ E_n \subseteq M_n \subseteq E_n^* .$$

(7) Cfr. loc. cit. alla nota (5) p. 69, teor. n. 6. 3. 32.

M_n è un insieme lebesghiano tale che $m_\alpha M_n = m_\alpha E_n^*$ (n. 2, a) e inoltre tale che

$$m_\alpha[M_n(M_{n-1} + M_{n-2} + \dots + M_1)] \leq m_\alpha[E_n^*(E_{n-1}^* + E_{n-2}^* + \dots + E_1^*)].$$

Da queste relazioni si deduce che:

$$m_\alpha \sum_n^{1,\infty} E_n^* = m_\alpha \{ E_1^* \dotplus \sum_n^{2,\infty}{}^{(0)} [E_n^* - E_n^*(E_{n-1}^* + E_{n-2}^* + \dots + E_1^*)] \} =$$

$$= m_\alpha E_1^* + \sum_n^{\infty} m_\alpha [E_n^* - E_n^*(E_{n-1}^* + E_{n-2}^* + \dots + E_1^*)] =$$

$$= m_\alpha E_1^* + \sum_n^{2,\infty} [m_\alpha E_n^* - m_\alpha \{ E_n^*(E_{n-1}^* + E_{n-2}^* + \dots + E_1^*) \}] \leq$$

$$\leq m_\alpha M_1 + \sum_n^{2,\infty} [m_\alpha M_n - m_\alpha \{ M_n(M_{n-1} + M_{n-2} + \dots + M_1) \}] =$$

$$= m_\alpha M_1 + \sum_n^{2,\infty} m_\alpha [M_n - M_n(M_{n-1} + M_{n-2} + \dots + M_1)] =$$

$$= m_\alpha \{ M_1 \dotplus \sum_n^{2,\infty}{}^{(0)} [M_n - M_n(M_{n-1} + M_{n-2} + \dots + M_1)] \} = m_\alpha \sum_n^{1,\infty} M_n .$$

Ma i due insiemi $\sum_n^{1,\infty} M_n$, $\sum_n^{1,\infty} E_n^*$ sono entrambi lebesghiani. Da un lato, poichè $E_n \subseteq M_n \subseteq E_n^*$, si ha $E \subseteq \sum_n^{1,\infty} M_n \subseteq E^*$ da cui (n. 2, a) $m_\alpha \sum_n^{1,\infty} M_n = m_\alpha E^*$, dunque

$$m_\alpha \sum_n^{1,\infty} E_n^* \leq m_\alpha E^* . \tag{2}$$

D'altro lato, poichè $\sum_n^{1,\infty} E_n^* \supseteq E$, si ha

$$m_\alpha \sum_n^{1,\infty} E_n^* \geq m_\alpha E^* . \tag{3}$$

Dalle (2), (3) si deduce infine che è

$$m_\alpha \sum_n^{1,\infty} E_n^* = m_\alpha E^* .$$

Dunque l'insieme $\sum_n^{1,\infty} E_n^*$ è un involucro lebesghiano di E, c.d.d.

Dopo ciò, la dimostrazione del nostro teorema (n. 1), seguendo il riferimento indicato nella nota ([5]), non presenta più alcuna difficoltà.