Bollettino
Unione Matematica Italiana

Elisa Gallo

Alcune proprietà dei sistemi (G) nello spazio.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.4, p. 557–565.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_4_557_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1956.

Alcune proprietà dei sistemi (G) nello spazio.

Nota di ELISA GALLO (a Torino)

Sunto. - *Come al n. 1.*

1. - In questa Nota ci proponiamo sopratutto di studiare un problema riguardante i sistemi (G) spaziali, cioè quei particolari sistemi ∞^6 di curve piane dello spazio ordinario definiti dalle due equazioni differenziali del terzo ordine

$$(1) \qquad \begin{cases} y''' = y''(Ay'' + Bz'' + C), \\ z''' = z''(Ay'' + Bz'' + C), \end{cases}$$

dove A, B, C sono funzioni di x, y, z, y', z'.

Precisamente vogliamo vedere se è possibile estendere ai sistemi (G) spaziali la proprietà dedotta dal Prof. TERRACINI sui sistemi (G) piani secondo la quale le ∞^1 coniche osculatrici in un E_1 dato alle curve integrali del sistema (G) passanti per tale E_1, sono bitangenti a una conica fissa detta conica di doppio contatto [1].

È necessario però dedurre prima alcune proprietà relative ai sistemi (G) spaziali cercando di estendere le analoghe proprietà valide per i sistemi (G) piani.

2. - *Curve di un sistema* (G) *spaziale appartenenti a un piano.* Innanzi tutto facciamo vedere che a un piano generico dello spazio appartengono ∞^3 curve di un sistema (G) spaziale e che esse formano un sistema (G) piano.

Se infatti cerchiamo le curve del sistema (G) spaziale, definito dalle (1), contenute in un piano generico di equazione

$$(2) \qquad ax + by + cz + d = 0 .$$

[1] Cfr. A TERRACINI, *Sobre la ecuación diferencial* $y''' = G(x, y, y')y'' + H(x, y, y')y''^2$ (Revista de Matemáticas y Física Teorica. Tucumán, vol 2°, 1941 paragr. 18). Sui sistemi (G) nello spazio cfr. anche D. DEMARIA: *Sui sistemi di curve iperspaziali che godono della proprietà proiettiva o prospettiva in prima approssimazione* (Mem. Accademia delle Scienze di Torino, vol. 1°, 1954).

le due equazioni (1) si riducono a una stessa equazione nella sola funzione incognita $y(x)$, e precisamente alla

$$y''' = G(x,\ y,\ y')y'' + H(x,\ y,\ y')y''^2 \tag{3}$$

dove G, H sono date dalle

$$G = C \qquad H = A - \frac{Bb}{c}\,. \tag{4}$$

Naturalmente è da intendere che nelle A, B, C la z si sostituisce a norma della (2).

La (3) è dunque l'equazione di un sistema (G) a cui appartengono le proiezioni sul piano (xy) delle curve considerate; anche queste formeranno un sistema (G).

3. - *Punto e piano satellite di un elemento spaziale del primo ordine rispetto a un sistema* (G) *spaziale.* Consideriamo ora un generico E_1 spaziale formato da un punto A di coordinate x_0, y_0, z_0 e da una retta a passante per A definita dalle equazioni

$$\left\{\begin{aligned} y - y_0 &= y_0'(x - x_0), \\ z - z_0 &= z_0'(x - x_0)\,. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Le equazioni del sistema (G) piano appartenente a un piano generico passante per a e formato da curve del sistema (G) spaziale definito dalle (1) sono, tenendo conto della (3) e delle (4),

$$\left\{\begin{aligned} & y''' = Cy'' + \left(A + \frac{B}{\lambda}\right) y''^2, \\ & y - y_0 - y_0'(x - x_0) = \lambda[z - z_0 - z_0'(x - x_0)]\,, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

dove λ è un parametro al variare del quale il piano rappresentato dalla seconda equazione del sistema (6) descrive il fascio di asse a. Rispetto al sistema (G) piano definito dalle (6), sappiamo introdurre il punto satellite P e la retta satellite p [2]; il primo avrà coordinate

$$x = x_0 + \frac{3}{C}, \quad y = y_0 + \frac{3y_0'}{C}, \quad z = z_0 + \frac{3z_0'}{C}\,, \tag{7}$$

[2] Cfr. A. Terracini, l.c. [1], paragr. 1.

mentre la retta satellite sarà individuata dalle equazioni:

$$(8)\qquad \begin{cases} \left[y_0'\left(A+\frac{B}{\lambda}\right)-3\right](x-x_0)-\left(A+\frac{B}{\lambda}\right)(y-y_0)=0\,, \\ y-y_0-y_0'(x-x_0)=\lambda[z-z_0-z_0'(x-x_0)]\,. \end{cases}$$

Poichè le coordinate del punto P non dipendono dal parametro λ, ne segue che il punto P non varia qualunque sia il piano considerato nel fascio di piani di asse a. Chiameremo tale punto P *punto satellite relativo all'* E_1 *spaziale* Aa.

Per studiare ora come varia la retta p al variare del parametro λ, eliminiamo λ tra le (8) operando il cambiamento di variabili

$$(9)\qquad \begin{cases} X=x-x_0\,, \\ Y=y_0'(x-x_0)-(y-y_0), \\ Z=z_0'(x-x_0)-(z-z_0)\,; \end{cases}$$

si ottiene così l'equazione

$$(10)\qquad 3X-AY-BZ=0$$

che rappresenta un piano passante per il punto A. Tale piano lo chiameremo *piano satellite relativo all'* E_1 *spaziale* Aa.

Riassumendo possiamo allora dire che, *dati nello spazio un sistema* (G) *e un* E_1 Aa, *esiste un punto sulla retta* a *che è punto satellite di tale elemento rispetto ai sistemi* (G) *piani contenuti in ogni generico piano per* a *e inoltre che esiste un piano per il punto* A *che contiene tutte le rette satelliti dell'elemento dato rispetto agli stessi sistemi* (G) *piani.*

Tale punto e tale piano sono quelli da noi chiamati. rispettivamente punto satellite e piano satellite dell' E_1 *spaziale* Aa.

4. - *I sistemi* (G) *spaziali come varietà* ∞^5 *di 3-elementi spaziali.* Dati nello spazio un sistema (G) e un generico E_1 Aa, a questo E_1 restano vincolati mediante il sistema (G) un punto satellite P e un piano satellite π che completano l'E_1 in una figura costituita da un punto A e da una retta a che si appartengono e inoltre da un punto P sulla retta a e da un piano π per il punto A. Chiamiamo brevemente tale figura *3-elemento spaziale* (in quanto è costituita dai due elementi lineari Aa e Pa e dall'elemento superficiale $A\pi$); l'elemento lineare Aa è il suo *elemento centrale* (A è il *centro* e a la *retta centrale*). Si vede così che un sistema (G) spaziale definisce nello spazio una totalità ∞^5 di 3-elementi spaziali.

Viceversa, partendo da una totalità ∞^5 di 3-elementi spaziali per i quali il punto satellite non coincida col punto centrale e il piano satellite non contenga la retta centrale, si giunge a un sistema (G) spaziale.

Verifichiamo analiticamente quanto abbiamo ora affermato; come risultato otterremo un'espressione esplicita dei coefficienti A, B, C che compaiono nelle (1) in funzione dei parametri che individuano i vari 3-elementi.

Siano rispettivamente x, y, z; x_1, y_1, z_1 le coordinate del punto centrale A e del punto satellite P; u_1, v_1, w_1 le coordinate plücheriane del piano satellite π e 1, y', z' i parametri direttori della retta centrale a. Per la totalità ∞^5 di 3-elementi spaziali considerata, si può supporre che x_1, u_1 e v_1 siano funzioni date di x, y, z, y', z'; poniamo allora:

$$\begin{aligned} x_1 &= h(x, y, z, y', z') \\ u_1 &= k(x, y, z, y', z') \\ v_1 &= l(x, y, z, y', z'). \end{aligned} \tag{11}$$

La y_1 e la z_1 si ricaveranno mediante le equazioni della retta a

$$\begin{cases} y_1 - y = y'(x_1 - x) \\ z_1 - z = z'(x_1 - x), \end{cases}$$

mentre la w_1 si ricava dall'equazione del piano π

$$u_1 x + v_1 y + w_1 z + 1 = 0.$$

Facciamo ora vedere che i coefficienti delle equazioni (1) si possono ricavare in modo univoco in funzione di h, k, l (il che basta per verificare l'asserto).

Esprimiamo innanzi tutto il coefficiente C tenendo conto delle coordinate del punto satellite e della prima delle posizioni (11); si ottiene

$$C = \frac{3}{h - x}.$$

Per esprimere invece A e B ricordiamo l'equazione del piano satellite (dalla quale ricaviamo i coefficienti u_1 e v_1) e le ultime due posizioni (11); otteniamo così il sistema

$$\begin{cases} A(-kxy' + ky - y') + B(-kxz' + kz - z') = -3kx - 3, \\ A(-lxy' + ly + 1) + B(-lxz' + lz) = -3lx. \end{cases}$$

Tale sistema è risolubile in uno e in un sol modo poichè il determinante dei coefficienti, che vale

$$z'(ly + kx + 1) - z(ly' + k),$$

è certo diverso da zero per l'ipotesi fatta che il piano satellite non contenga la retta centrale.

I coefficienti A e B sono allora espressi dalle

$$A = \frac{-3lz}{z'(ly + kx + 1) - z(ly' + k)},$$

$$B = \frac{3(ly + kx + 1)}{z'(ly + kx + 1) - z(ly' + k)}.$$

Possiamo così concludere che *lo studio di un sistema di due equazioni differenziali del terzo ordine del tipo* (1) *equivale a quello di una totalità* ∞^5 *di 3-elementi spaziali.*

5. - *Elementi eccezionali di 1ª e 2ª specie.* Consideriamo un E_1 spaziale Aa e supponiamo che esso sia eccezionale di 1ª specie ([3]) rispetto a tutti i sistemi (G) piani contenuti nei piani passanti per a; diremo tale elemento, anche nello spazio, *eccezionale di 1ª specie.*

Per esprimere analiticamente questo fatto imponiamo all'E_1Aa di essere eccezionale di 1ª specie rispetto al sistema (G) piano definito dalle (6); si ottiene la condizione

$$C^2 - 3(C_x + C_y y' + C_z z') = 0, \tag{12}$$

che è anche la condizione perchè sia eccezionale di 1ª specie nello spazio. Se ne deduce che anche nello spazio un E_1 Aa è eccezionale di 1ª specie quando il punto satellite P è punto di diramazione nella corrispondenza tra le due punteggiate sovrapposte descritte da A e da P.

Analogamente e dualmente definiamo nello spazio *eccezionale di 2ª specie* un E_1 Aa tale che, considerato come elemento piano nei piani passanti per a, è sempre eccezionale di 2ª specie ([4]).

Per ottenere un'espressione analitica di questo fatto, scriviamo che l'E_1 è eccezionale di 2ª specie in un piano generico per a, vale a dire

$$\left(A + \frac{B}{\lambda}\right)^2 + 3\left(A_{y'} + \frac{A_{z'}}{\lambda} + \frac{B_{y'}}{\lambda} + \frac{B_{z'}}{\lambda^2}\right) = 0.$$

([3]) Cfr. A. TERRACINI, l.c. ([1]), paragr. 9.

([4]) Cfr. A. TERRACINI, l.c. ([1]), paragr. 9.

Dovendo questa equazione essere identica rispetto a λ, segue:

$$
\begin{aligned}
& A^2 + 3A_{y'} = 0, \\
(13) \qquad & 2AB + 3A_{z'} + 3B_{y'} = 0, \\
& B^2 + 3B_{z'} = 0.
\end{aligned}
$$

Se, rispetto a un sistema (G) spaziale, tutti gli E_1 dello spazio risultano eccezionali di 1ª o 2ª specie, si dirà che *il sistema* (G) *è eccezionale di 1ª o 2ª specie.*

6. - *Piano centropolare relativo a un dato elemento spaziale del primo ordine.* Con ogni E_1 spaziale Aa rimangono collegati, mediante un sistema (G) diversi punti e piani; tra questi ultimi definiamo solo un piano che chiameremo centropolare.

Riguardo a un generico sistema (G) piano sappiamo definire la retta centropolare e sappiamo ricavarne l'equazione ([5]) che, riferendoci al sistema (G) piano definito dalle (6), assume la forma:

$$
(14) \qquad \begin{cases} mL - 6C(x - x_0) + 18 = 0, \\ y - y_0 - y_0'(x - x_0) = \lambda[z - z_0 - z_0'(x - x_0)], \end{cases}
$$

essendo:

$$
(15) \qquad \begin{aligned}
& m = C\left(A + \frac{B}{\lambda}\right) + 3\left(C_{y'} + \frac{C_{z'}}{\lambda}\right) + 3\left(A_x + A_z z'_0 + \frac{B_x + B_z z'_0}{\lambda}\right) + 3y'_0\left(A_y + \frac{B_y}{\lambda}\right), \\
& L = y_0'(x - x_0) - (y - y_0).
\end{aligned}
$$

Definiamo come *piano centropolare, relativo a un* E_1 *spaziale* Aa, *rispetto a un sistema* (G) *spaziale, il luogo della retta centropolare dell'* E_1 *considerato in un piano generico per* a *rispetto al sistema* (G) *contenuto in tale piano, al variare del piano stesso attorno ad* a.

Per ricavare l'equazione del piano centropolare, eliminiamo λ tra le (14) tenendo conto delle (15) e delle (9); si ottiene

$$
(16) \qquad RY + TZ - 6CX + 18 = 0
$$

dove si è posto

$$
(17) \qquad R = AC + 3N + 3C_{y'} \quad , \quad T = BC + 3M + 3C_{z'}
$$

e inoltre

$$
(17') \qquad N = A_x + A_y y_0' + A_z z_0' \quad , \quad M = B_x + B_y y'_0 + B_z z'_0 .
$$

([5]) Cfr. A. Terracini, l.c. ([1]), paragr. 19.

7. *La quadrica di doppio contatto.* Un sistema (G) piano, non eccezionale di 1ª specie [6] vincola con ogni E_1 una conica, detta di doppio contatto, alla quale risultano bitangenti tutte le coniche osculatrici in tale E_1 alle curve integrali del sistema (G) piano passanti per l'E_1 stesso. Le equazioni di tale conica, se ci si riferisce al sistema (G) piano definito dalle (6), sono [7]:

$$
(18)\qquad \begin{cases} [mL-6C(x-x_0)+18]^2+4\Gamma\left\{\left[3(x-x_0)-\left(A+\frac{B}{\lambda}\right)L\right]^2+\Omega L^2\right\}=0, \\ y-y_0-y_0'(x-x_0)=\lambda\,[z-z_0-z_0'(x-x_0)], \end{cases}
$$

dove m ed L sono dati dalle (15), mentre si ha:

$$
(19)\qquad \begin{aligned} &\Gamma=C^2-3(C_x+C_y y'_0+C_z z'_0), \\ &\Omega=\left(A+\frac{B}{\lambda}\right)^2+3\left(A_{y'}+\frac{A_{z'}}{\lambda}+\frac{B_{y'}}{\lambda}+\frac{B_{z'}}{\lambda^2}\right). \end{aligned}
$$

Supponiamo ora che il piano in cui è posta la conica (18) vari nel fascio di piani di asse a; la conica descriverà una superficie a cui risulteranno bitangenti tutte le coniche osculatrici, nell'E_1 dato, alle curve integrali del sistema (G) spaziale passanti per tale E_1. Studiamo questa superficie ricavandone innanzi tutto l'equazione; bisogna per questo eliminare λ tra le (18), ricordare il cambiamento di variabili espresso dalle (9) e le posizioni (17) e (17'). Ponendo inoltre

$$
(20)\qquad \begin{aligned} &P=2A^2+3A_{y'}\quad,\quad S=2B^2+3B_{z'}, \\ &Q=4AB+3B\quad+3A_{z'}, \end{aligned}
$$

l'equazione assume la forma:

$$
(21)\qquad (RY+TZ-6CX+18)^2- \\ -4\Gamma\,(6AXY+6BXZ-QYZ-9X^2-PY^2-SZ^2)=0
$$

e rappresenta perciò una quadrica che chiamiamo *quadrica di doppio contatto.*

La forma dell'equazione (21) mette in evidenza che la quadrica di doppio contatto appartiene al fascio di quadriche individuato

[6] Per sistemi eccezionali di 2ª specie i calcoli che seguono continuano a sussistere, ma conducono a una formulazione del risultato in una forma un po' diversa che enunceremo a parte.

[7] Cfr. A. TERRACINI, l. c. [1], paragr. 18.

dal piano

$$RY + TZ - 6CX + 18 = 0$$

– coincidente col piano centropolare – contato due volte e dal cono

$$6AXY + 6BXZ - QYZ - 9X^2 - PY^2 - SZ^2 = 0.$$

Concludendo possiamo dire che, *dati nello spazio un sistema* (G) *e un* E_1 *non eccezionale nè di 1ª nè di 2ª specie, le coniche aventi in tale* E_1 *un contatto del quarto ordine con le singole curve integrali contenenti l'* E_1 *stesso, sono bitangenti a una quadrica fissa (rispetto alla quale il centro dell'* E_1 *ha come polare il piano centropolare).*

Se l'E_1 considerato è eccezionale di 1ª specie, le coniche osculatrici alle curve integrali appartenenti a un piano generico per a e aventi nell'E_1 un contatto del quarto ordine con la corrispondente curva integrale, formano un fascio; facendo variare il piano attorno alla retta a, si deduce che tali coniche ricoprono le quadriche di un fascio.

L'equazione di questo fascio di quadriche si ottiene eliminando λ tra le equazioni

$$\begin{cases} y_0''\left\{\left[3(x-x_0)-\left(A+\dfrac{B}{\lambda}\right)L\right]^2+\Omega L^2\right\}+L[mL-6C(x-x_0)+18]=0, \\ y-y_0-y_0'(x-x_0)=\lambda[z-z_0-z_0'(x-x_0)], \end{cases}$$

che rappresentano il fascio di coniche in un piano generico per a (8).

Tenendo presenti le (9), (17), (17') e (20) si ha l'equazione del fascio di quadriche nella forma:

$$y_0''(6AXY + 6BXZ - QYZ - 9X^2 - PY^2 - SZ^2) + \\ + Y(RY + TZ - 6CX + 18) = 0.$$

Vediamo ora il caso in cui l'E_1 è eccezionale di 2ª specie. In questo caso l'equazione della quadrica di doppio contatto diventa, ricordando le (13),

$$(RY + TZ - 6CX + 18)^2 + 4\Gamma(3X - AY - BZ)^2 = 0\,.$$

Questa quadrica è spezzata in due piani non coincidenti appartenenti al fascio definito dal piano satellite e dal piano centropolare: quei due piani segano sui singoli piani per la retta a la coppia di rette in cui degenera la conica di doppio contatto relativa al sistema (G) esistente nel piano stesso.

(8) Cfr. A. Terracini, l c. (1), paragr. 18.

Concludendo: *quando l' E_1 è eccezionale di 1^a specie, le coniche osculatrici alle curve integrali in tale* E_1 *che nell'* E_1 *stesso hanno un contatto del quarto ordine con la corrispondente curva integrale ricoprono complessivamente le quadriche di un fascio; quando l'* E_1 *è eccezionale di 2^a specie, tali coniche risultano tangenti a due piani fissi.*

Osservazioni.

A). La proprietà dimostrata per un generico sistema (G) spaziale si può pensare come l'estensione di una proprietà valida per le ipersuperficie di S_4 contenuta nel teorema di ČECH che estende agli iperspazi il primo teorema di MOUTARD ([9]).

Si può infatti passare da quest'ultima alla proprietà da noi stabilita nel caso particolare di un sistema (G) sezionale vale a dire di un sistema ∞^6 di curve piane dello spazio ordinario ottenuto proiettando da un punto P di un S_4 su un S_3, sghembo con P, le ∞^6 sezioni piane di una qualsiasi ipersuperficie di S_4.

Per dimostrare quanto si è ora affermato, enunciamo il teorema di ČECH nella forma: sia t una retta tangente in un punto O a una ipersuperficie V_3 di S_4. Le coniche osculatrici in O alle curve sezioni piane della V_3 mediante tutti i piani passanti per t, riempiono una quadrica a tre dimensioni.

Consideriamo ora una ipersuperficie generica Σ di S_4 la quale genera per proiezione da un punto generico P di S_4 su un S_3 sghembo con P un sistema (G) sezionale. Consideriamo poi su Σ il punto O e sia t una retta tangente a Σ in O; la coppia Ot si proietta da P su S_3 in un E_1. Sia poi V_3^2 la quadrica a tre dimensioni relativa a t, luogo delle coniche osculatrici alle sezioni piane di Σ con piani passanti per t; essa si proietta doppiamente da P su S_3 dando luogo in S_3 a una quadrica contorno-apparente V_2^2 a cui risultano bitangenti tutte le coniche proiezioni delle sezioni piane della V_3^2 stessa. Ma ogni conica osculatrice in O alle sezioni piane di Σ per t si proietta in S_3 in una conica osculatrice nell' E_1 a una curva integrale del sistema (G) sezionale; queste coniche sono perciò tutte bitangenti a una quadrica.

B). All'equazione della quadrica di doppio contatto si sarebbe anche potuto giungere scrivendo l'equazione della superficie focale della congruenza delle coniche osculatrici considerate.

([9]) Cfr. FUBINI E ČECH, *Geometria proiettiva differenziale*, (pag. 618).