BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

JAURÈS CECCONI

Una osservazione sulla convergenza in variazione e in area.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.4, p. 524–525.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_4_524_0>

Una osservazione sulla convergenza in variazione e in area.

Nota di JAURÈS CECCONI (a S. Carlos, Brasil)

Sunto. - *Si dà una condizione sufficiente per la convergenza in area.*

Sia (T, A): $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in A$ una trasformazione continua del quadrato unitario orientato $A : 0 \leqq u, v \leqq 1$; del piano uv nello spazio xyz.

Sia (T_n, A): $x = x_n(u, v)$, $y = y_n(u, v)$, $z = z_n(u, v)$, $(u, v) \in A$; $n = 1, 2, \ldots$; una successione di trasformazioni continue per la quale si abbia $x_n(u, v) \to x(u, v)$, $y_n(u, v) \to y(u, v)$, $z_n(u, v) \to z(u, v)$ uniformemente su A.

Diremo in questo caso che la successione di trasformazioni (T_n, A) *converge* verso la trasformazione (T, A).

Siano $a(T, A)$, $a(T_n, A)$; $n = 1, 2, \ldots$; le aree secondo LEBESGUE, delle superficie rappresentate rispettivamente da (T, A) e (T_n, A).

Diremo che la successione (T_n, A) *converge in area* verso la trasformazione (T, A) se, oltre a convergere verso (T, A) nel senso sopra indicato, è tale che $a(T_n, A) \to a(T, A)$.

Siano
$$\begin{aligned} &(T_1, A): y = y(u, v),\ z = z(u, v), \\ &(T_2, A): z = z(u, v),\ x = x(u, v), \qquad (u, v) \in A \\ &(T_3, A): x = x(u, v),\ y = y(u, v) \end{aligned}$$
le trasformazioni piane continue ottenute proiettando (T, A) sui piani coordinati.

Siano $(T_{1,n}, A)$, $(T_{2,n}, A)$, $(T_{3,n}, A)$; $n = 1, 2, \ldots$, le trasformazioni piane ottenute proiettando allo stesso modo sui piani coordinati la trasformazione (T_n, A); $n = 1, 2, \ldots$.

Siano $a(T_i, A)$, $a(T_{in}, A)$; $i = 1, 2, 3$; $n = 1, 2 \ldots$; le aree secondo LEBESGUE delle superficie rappresentate dalle trasformazioni piane corrispondenti. Diremo che la successione (T_n, A) *converge in variazione* verso la trasformazione (T, A) se (T_n, A) converge verso (T, A) nel senso sopra specificato e se oltre a ciò si ha $a(T_{in}, A) \to a(T_i, A)$; $i = 1, 2, 3$.

È stato dimostrato da L. CESARI [3] e indipendentemente da T. RADÓ [7] che se (T_n, A) converge in area verso (T, A) allora converge anche in variazione verso (T, A).

Si desume da esempi che si deducono facilmente da altro già dato da C. R. ADAMS e J. A. CLARKSON [1] che il contrario non è vero.

Scopo di questa breve nota e di osservare che

TEOREMA. - Se (T_n, A) *converge* verso (T, A) e se per ogni piano π di xyz la successione di trasformazioni $(T_{\pi, n}, A)$ ottenuta proiettando, nel senso sopra introdotto, la trasformazione (T_n, A) sopra π *converge in area* verso la trasformazione (T_π, A), ottenuta proiettando alla stessa maniera (T, A) sopra il piano π, allora la successione (T_n, A) *converge in area* verso (T, A). Il teorema enunciato è poi ovviamente invertibile in virtù della indipendenza dagli assi della area secondo LEBESGUE e del risultato sopra riferito di L. CESARI e T. RADÓ.

Il teorema sopra enunciato estende alle superficie un teorema recentemente dato da G. DARBO [5] per curve.

Dimostrazione del teorema.

Conservando tutte le notazioni sopra introdotte diciamo $P = (x, y, z)$ il punto appartenente alla semisfera superiore unitaria U: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$; di xyz, per il quale la retta OP (essendo O la origine del sistema xyz) risulta perpendicolare al piano π.

Si ha allora, in virtù di noti risultati di R. G. HELSEL e T. RADÓ [6] concernenti la area secondo CAUCHY di una superficie,

$$(*) \qquad a(T, A) = \frac{1}{\pi}\int_U a(T_P, A)dP,$$

$$a(T_n, A) = \frac{1}{\pi}\int_U a(T_{P,n}, A)dP, \; n = 1, 2, \ldots$$

essendo dP l'elemento di area su U ed essendo $(T_P, A) \equiv (T_\pi, A)$. $(T_{P,n}, A) \equiv (T_{\pi,n}, A)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Ora in virtù delle ipotesi si ha, per ogni $P \in U$,

$$(**) \qquad a(T_{P,n}, A) \to a(T_P, A).$$

Risulta inoltre, in virtù della indipendenza dell'area secondo LEBESGUE dalla direzione degli assi e di un fondamentale teorema per l'area secondo LEBESGUE stabilito da L. CESARI [2], [4]

$$a(T_{P,n}, A) \leq a(T_n, A) \leq a(T_{1,n}, A) + a(T_{2n}, A) + a(T_{3n}, A), \quad n = 1, 2, \ldots$$

e quindi, in virtù delle ipotesi,

$$a(T_{P,n}, A) < H$$

essendo H opportunamente scelto e indipendente da P e n.

Il nostro teorema discende allora da (*), (**) e da noti teoremi sulla integrazione secondo LEBESGUE.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. R ADAMS-J. A. CLARKSON, *On convergence in variation*, « Bull. Am. Math. Soc. », 40, 413-417, (1934).

[2] L. CESARI, *Caratterizzazione analitica delle superficie continue di area finita secondo Lebesgue*, « Ann Sc. Norm. Sup. Pisa », (2), 10, 253-294, (1941); 11, 1-42, (1942).

[3] L. CESARI, *Sull'area secondo Lebesgue delle superficie continue*, « Rend. Accad. Lincei », (8), 3, 486-495, (1947).

[4] L. CESARI, *Surface area*, Princeton University Press. (1956).

[5] G. DARBO, *Convergenza in variazione e convergenza in lunghezza*, « Ann. Univ. Ferrara », 3, 1-9, (1953-1954).

[6] R. G. HELSEL e T. RADÓ, *The Cauchy area of a Fréchet surface*, « Duke Math. Journ. » 15, 159-167 (1948).

[7] T. RADÓ, *Convergence in area*, « Duke Matk. Journ.» 16, 61-71, (1949).