Bollettino Unione Matematica Italiana

Giuliano Toraldo di Francia

Onde elettromagnetiche piane in un mezzo dielettrico non omogeneo, corrispondente a uno spazio di Fermat pseudosferico.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.4, p. 515–523.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_4_515_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1956.

Onde elettromagnetiche piane in un mezzo dielettrico non omogeneo, corrispondente a uno spazio di Fermat pseudosferico.

Nota di GIULIANO TORALDO DI FRANCIA (a Firenze)

Sunto. - *Si dimostra l'esistenza di una distribuzione spaziale di costante dielettrica, nella quale qualsiasi piano può essere una superficie d'onda TEM, che si propaga come tale. Lo stesso mezzo, quando riempia opportunamente una guida d'onda curva a sezione rettangolare, consente la propagazione di modi piani TE.*

Introduzione.

La propagazione di onde elettromagnetiche piane in un mezzo dielettrico non omogeneo è stata studiata, con particolare riguardo alle onde guidate, da vari autori, specialmente italiani, fra i quali vanno citati GRAFFI [1], AGOSTINELLI [2], CAPRIOLI [3]. Si suppone in questi studi che le proprietà del mezzo (comprendendo nel mezzo le eventuali pareti della guida) non dipendano da una delle coordinate cartesiane, per esempio dalla z, e che la propagazione avvenga proprio lungo l'asse z. Si dimostra allora che i classici modi di propagazione che si considerano quando il dielettrico è omogeneo, o non possono sussistere, o sussistono solo in casi particolari. Fra l'altro risulta che non possono sussistere onde piane *TEM.*

(1) D. GRAFFI, *Sulla propagazione delle onde elettromagnetiche in un tubo conduttore riempito da un dielettrico eterogeneo,* « Ann. Mat. », **30**, 233 (1949); *Sulla propagazione delle onde di tipo elettrico o magnetico in una guida a sezione circolare riempita da un dielettrico eterogeneo,* « Mem. Acc. Sc. », Bologna 7 (1950); *Alcune proprietà delle guide d'onda con dielettrico eterogeneo,* « Piccole Note, Recensioni e Notizie, Ist. Sup. Poste e Telecom. », **3**, 2 (1954).

(2) C. AGOSTINELLI, *Sulla propagazione di onde elettromagnetiche in un tubo conduttore riempito di dielettrico eterogeneo,* « Atti Acc. Sc. », Torino (1952); *Sulle propagazioni di onde elettromagnetiche guidate entro tubi cilindrici,* « Rend. Sem. Mat. », Torino (1952); *Sopra due casi notevoli di integrabilità delle equazioni della propagazione di onde elettromagnetiche in un tubo cilindrico circolare con dielettrico eterogeneo,* « Boll. Un. Mat. It. », **7**, 257, (1952).

(3) L. CAPRIOLI, *Onde E. M. di tipo trasversale nelle guide d'onda rettilinee e con dielettrico eterogeneo,* « Atti IV Congr. Un. Mat. It. », (1951); *Onde elettromagnetiche trasversali dei tipi TE, TM nelle guide d'onda rettilinee con dielettrico eterogeneo,* « Atti Acc. Sc. », Torino, **86** (1952).

Va notato che per la validità di questi risultati è essenziale che si pretenda una propagazione lungo l'asse z. Infatti mostreremo in questo lavoro che, se si rinuncia a tale condizione, esiste almeno una distribuzione di costante dielettrica del tipo detto sopra, nella quale *qualsiasi piano* può costituire una superficie d'onda *TEM*, che si propaga rimanendo piana e *TEM*. Vedremo poi che in un dielettrico siffatto possono anche sussistere modi piani capaci di essere guidati da una guida d'onda a sezione rettangolare uniforme e *ad asse circolare*; questa proprietà potrà essere sfruttata per costruire un raccordo curvo fra guide di diversa direzione.

Il mezzo dielettrico in parola è caratterizzato da una costante dielettrica inversamente proporzionale al quadrato della distanza da un piano, che chiameremo *piano limite*. L'indice di rifrazione è quindi inversamente proporzionale alla distanza dal piano limite. Un mezzo nel quale si verifica quest'ultimo fatto, fu già considerato dall'autore nel caso delle onde acustiche ([4]). Tale mezzo presenta notevoli proprietà geometriche, dovute al fatto che il corrispondente spazio di FERMAT è *pseudosferico*, cioè a curvatura riemanniana costante negativa. Fra l'altro risulta per un teorema di SIGNORINI ([5]) che i raggi sono archi di circonferenza. Nel nostro caso hanno tutti il centro sul piano limite e giacciono in piani perpendicolari al piano limite ([6]).

Considereremo soltanto il semispazio da una banda del piano limite. Prenderemo per unità di lunghezza la distanza fra il piano limite e il piano sul quale la costante dielettrica ha lo stesso valore che nel vuoto. Si noterà che in qualsiasi concreta realizzazione fisica la regione interessata sarà ovviamente compresa fra questi due piani (e il piano limite non avrà punti a comune con essa).

Equazioni differenziali dei modi semplici TE.

Dato che, come abbiamo osservato, tutti i raggi sono circonferenze col centro sul piano limite, si vede subito che una qualsiasi onda piana, che si propaghi come nell'ottica geometrica, ruota attorno alla sua intersezione col piano limite. Ciò suggerisce di

([4]) G. TORALDO DI FRANCIA, *Realtà fisica di una varietà di Fermat pseudosferica*, « Rend. Acc. Naz. Linc. », 8, 489 (1950).

([5]) A. SIGNORINI, *Qualche teorema di ottica geometrica*, « Rend Sem. Mat. Fis. », Milano, **20** (1949).

([6]) Vedi anche: R. COURANT e D. HILBERT, « *Methods of Mathematical Physics* », New York, 1953, p. 258.

riferirsi a un sistema di coordinate cilindriche ρ, θ, z avente per asse tale intersezione. Stabiliremo che il piano limite corrisponda a $\theta = \pm\pi/2$ e che lo spazio considerato sia quello $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. La costante dielettrica sarà allora data da $\varepsilon = \varepsilon_0/\rho^2 \cos^2\theta$, essendo ε_0 la costante dielettrica del vuoto. La permeabilità magnetica μ sarà supposta costante nel mezzo.

In tutte le grandezze complesse del campo verrà sottinteso il fattore temporale $\exp(-i\omega t)$. Si porrà poi $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu}$, per cui k rappresenterà il numero d'onde $2\pi/\lambda$ della radiazione considerata nel vuoto.

Le equazioni di MAXWELL si scrivono allora

$$(1)\quad \rho\,\frac{\partial H_z}{\partial\theta} - \rho^2\frac{\partial H_\theta}{\partial z} = -\frac{i\omega\varepsilon_0}{\cos^2\theta}E_\rho \qquad (4)\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z} = i\omega\mu H_\rho$$

$$(2)\quad \rho^2\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \rho^2\frac{\partial H_z}{\partial\rho} = -\frac{i\omega\varepsilon_0}{\cos^2\theta}E_\theta \qquad (5)\quad \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial\rho} = i\omega\mu H_\theta$$

$$(3)\quad \rho\,\frac{\partial(\rho H_\theta)}{\partial\rho} - \rho\,\frac{\partial H_\rho}{\partial\theta} = -\frac{i\omega\varepsilon_0}{\cos^2\theta}E_z \qquad (6)\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho E_\theta)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial\theta} = i\omega\mu H_z$$

dove le componenti indicate rappresentano le *proiezioni* dei rispettivi vettori sulle linee coordinate.

Non studieremo in generale i modi TE, ma considereremo soltanto i casi in cui il campo elettrico ha la sola componente E_z o la sola componente E_ρ. I modi di questi due tipi verranno chiamati *modi semplici*.

Cominciamo col porre $E_\rho = E_\theta = 0$. Si ha allora dalla (6) $H_z = 0$, dalla (1) $\partial H_\theta/\partial z = 0$ e dalla (2) $\partial H_\rho/\partial z = 0$. Poichè da div $\varepsilon E = 0$ segue $\partial E_z/\partial z = 0$, si conclude che nessuna componente del campo dipende da z. La (4) e la (5) ci dànno

$$(7)\qquad H_\rho = \frac{1}{i\omega\mu}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial E_z}{\partial\theta}$$

$$(8)\qquad H_\theta = -\frac{1}{i\omega\mu}\,\frac{\partial E_z}{\partial\rho}$$

Sostituendo nella (3) si ottiene

$$(9)\qquad \rho^2\frac{\partial^2 E_z}{\partial\rho^2} + \rho\frac{\partial E_z}{\partial\rho} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial\theta^2} + \frac{k^2}{\cos^2\theta}E_z = 0.$$

Questa equazione è a variabili separabili. Ponendo

$$(10)\qquad E_z = R(\rho)\,T(\theta)$$

si trova

$$\rho^2 R'' + \rho R' + \alpha^2 R = 0 \tag{11}$$

$$T'' + \left(\frac{k^2}{\cos^2\theta} - \alpha^2\right) T = 0 \tag{12}$$

dove α è una costante arbitraria, a priori complessa. Una volta integrate queste equazioni e ricavata E_z, si ottengono H e H_θ dalle (7) e (8).

Consideriamo poi il caso in cui $E_\theta = E_z = 0$. Dalla (4) si ha $H_\rho = 0$. L'equazione $\operatorname{div} \varepsilon E = 0$ scritta in coordinate cilindriche, quando si sostituisca $\varepsilon = \varepsilon_0/\rho^2 \cos^2\theta$, fornisce

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{E_\rho}{\rho}\right) = 0 \tag{13}$$

da cui

$$E_\rho = \rho f(\theta, z) \tag{14}$$

dove $f(\theta, z)$ è una funzione da determinarsi. Tenendo conto della (14), la (5) fornisce $i\omega\mu H_\theta = \rho\partial f/\partial z$ e, poichè dalla (3) si ottiene $\partial(\rho H_\theta)/\partial\rho = 0$ e quindi, dato che f non dipende da ρ, $\rho\partial f/\partial z = 0$, si vede subito che deve essere $\partial f/\partial z = 0$ e $H_\theta = 0$. Scriveremo pertanto $f(\theta)$ al posto di $f(\theta, z)$. Dalla (6) si ottiene

$$H_z = -\frac{1}{i\omega\mu}\frac{df}{d\theta}\,. \tag{15}$$

Con questo la (2) è automaticamente soddisfatta. Rimane la (1), che, in base a quanto precede, fornisce subito

$$f'' + \frac{k^2}{\cos^2\theta} f = 0\,. \tag{16}$$

Una volta trovata la $f(\theta)$, le (14) e (15) ci danno E_ρ e H_z, mentre tutte le altre componenti del campo sono nulle.

Le onde piane TEM.

Poniamo $\alpha = 0$ nella (11). Si ottiene per R la soluzione generale $R = a + b \log\rho$ con a e b costanti. Nel caso che si ponga $b = 0$, segue dalle (8), (10) $H_\theta = 0$. Allora, tenendo conto della (7) e della (12) otteniamo un campo della forma

$$E_z = f(\theta) \quad , \quad H_\rho = \frac{1}{i\omega\mu}\frac{1}{\rho} f'(\theta) \tag{17}$$

dove $f(\theta)$ soddisfa l'equazione

$$f'' + \frac{k^2}{\cos^2\theta} f = 0 \tag{18}$$

e tutte le altre componenti del campo sono nulle. Si ha dunque un'onda piana *TEM.*

Un'altra onda piana *TEM* è fornita dalle (14), (15), che scriviamo

$$E_\rho = \rho f(\theta) \quad , \quad H_z = -\frac{1}{i\omega\mu} f'(\theta) \tag{19}$$

mentre la $f(\theta)$ soddisfa ancora alla (18).

Resta da integrare la (18). Con la sostituzione $\xi = i \tan\theta$, si ottiene

$$(1 - \xi^2) \frac{d^2 f}{d\xi^2} - 2\xi \frac{df}{d\xi} - k^2 f = 0 . \tag{20}$$

Questa è l'equazione di LEGENDRE, con $-k^2 = n(n+1)$, cioè con n dato da

$$n = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - k^2} . \tag{21}$$

La soluzione generale della (18) può dunque scriversi

$$f(\theta) = AP_n(i \tan\theta) + BQ_n(i \tan\theta) \tag{22}$$

dove P_n e Q_n sono le funzioni di LEGENDRE di prima e di seconda specie di grado n e A e B sono costanti complesse arbitrarie. La discussione di questa espressione potrebbe condursi in base alla teoria delle funzioni di LEGENDRE di grado e di argomento complessi ([7]), ma i risultati non sembrano essere molto perspicui dal punto di vista fisico.

Più semplice e insieme più interessante è svolgere quelle considerazioni di carattere generale che si usano fare quando un'equazione del tipo della (18) deve rappresentare una propagazione ondosa.

Per esempio, consideriamo l'approssimazione *WKB.* È noto che quando una funzione d'onda $u(\theta)$ obbedisce all'equazione

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + h^2(\theta) u = 0 \tag{23}$$

([7]) E. W. HOBSON, *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics,* (Cambridge, 1931), p. 178 e sgg.

in una regione in cui la funzione reale $h(\theta)$ è diversa da zero e continua con le sue derivate prima e seconda, un'onda progressiva è rappresentata dall'espressione approssimata

$$u(\theta) = \frac{A}{\sqrt{|h(\theta)|}} \exp\left[i \int^{\theta} |h(\xi)| \, d\xi\right] \tag{24}$$

con A costante.

L'approssimazione è tanto migliore quanto più piccoli sono i valori assoluti di h' e h'' rispetto a quello di h e quanto maggiore è $|h|$ rispetto all'unità. Ciò si verifica subito sostituendo la (24) nella (23).

Nel nostro caso abbiamo per la (18) $|h| = k/\cos\theta$ e, applicando la (24), si ottiene

$$f(\theta) = A\sqrt{\cos\theta}\, \exp\left[ik \log\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]. \tag{25}$$

L'approssimazione vale a distanza dai punti singolari $\theta = \pm\pi/2$ dell'equazione (18) e tanto meglio quanto più k è grande rispetto all'unità.

Notiamo poi che la (18) non ammette una propagazione ondosa in un solo senso, senza riflessione. In altre parole, un'onda che si propaga nel senso delle θ positive, genera necessariamente un'onda che si propaga nel senso delle θ negative ([8]).

Per valutare l'entità di questa riflessione, supponiamo che l'onda (25) venga generata in corrispondenza dell'azimut $\theta = 0$ e si propaghi fino all'azimut $\theta_0 < \pi/2$ (dove, per esempio, possiamo supporre che venga totalmente assorbita da un opportuno assorbitore). Vogliamo calcolare il coefficiente di riflessione dovuto al mezzo compreso nell'intervallo $0 \leq \theta \leq \theta_0$. A questo scopo tornano utili i principi variazionali stabiliti dall'autore per i coefficienti di riflessione delle barriere di potenziale ([9]). Risulta da essi che per la funzione d'onda (24), soluzione approssimata della (23), il coefficiente di riflessione r dello strato compreso nell'intervallo

([8]) È il ben noto fenomeno dei mezzi stratificati, sul quale esiste una copiosa letteratura. Da segnalare un recente studio su un caso molto generale in cui si ha assenza di riflessione: I. KAY e H. E. MOSES, ***Reflectionless Transmission through Dielectrics and Scattering Potentials***, New York Univ. « Inst. Math. Sc. », Res. Rep. No. EM-91 (1956).

([9]) G. TORALDO DI FRANCIA, ***Principi variazionali per i coefficienti di riflessione delle barriere di potenziale***, « Nuovo Cimento », 7, 255 (1950).

$0 \leq \theta \leq \theta_0$ può essere espresso da ciascuna delle due formule approssimate ([10])

$$(26) \qquad r = \frac{i}{8} \int_0^{\theta_0} d\theta \left(\frac{3h'^2}{h^3} - \frac{2h''}{h^2} \right) \exp \left[2i \int_0^{\theta} h(\xi) d\xi \right]$$

$$(27) \qquad r = -\frac{1}{2} \int_0^{\theta_0} d\theta \, \frac{h'}{h} \exp \left[2i \int_0^{\theta} h(\xi) d\xi \right].$$

Ponendo $h = k / \cos \theta$ e introducendo una nuova variabile d'integrazione v con la sostituzione

$$(28) \qquad \tanh v = \sin \theta \quad , \quad \frac{1}{\cosh v} = \cos \theta$$

le (26), (27) divengono, dopo alcuni calcoli che omettiamo

$$(29) \qquad r = -\frac{i}{8k} \int_0^{v_0} \left(1 + \frac{1}{\cosh^2 v} \right) e^{2ikv} dv$$

$$(30) \qquad r = -\frac{1}{2} \int_0^{v_0} \tanh v \, e^{2ikv} dv$$

essendo v_0 il valore di v che corrisponde a $\theta = \theta_0$.

Dalla (29) si ha con un'integrazione per parti

$$(31) \qquad r = -\frac{1}{16k^2}(1 - e^{2ikv_0}) + \frac{1}{8ik} \tanh v_0 \, e^{2ikv_0} - \frac{1}{4} \int_0^{v_0} \tanh v \, e^{2ikv} dv$$

e, paragonando con la (30), si ottiene subito

$$(32) \qquad r = \frac{1}{8k^2}(1 - e^{2ikv_0}) + \frac{1}{4ik} \tanh v_0 \, e^{2ikv_0} .$$

Sarà bene notare che i valori approssimati di r (29) e (30) sono in generale diversi fra loro; e diverso da ambedue sarà il valore (32). Ma, evidentemente, ciò non nuoce alla validità del procedimento.

Infine sostituendo nella (32) l'espressione di v_0 in funzione di θ_0 tratta dalla (28), si ha

$$(33) \qquad r = \frac{1}{8k^2} + \left(\frac{\sin \theta_0}{4ik} - \frac{1}{8k^2} \right) \exp \left[2ik \log \tan \left(\frac{\theta_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

([10]) Formule (11) e (17) rispettivamente del lavoro citato al richiamo (9).

Si vede subito che, se la lunghezza d'onda è molto piccola (k molto grande), il modulo di r è molto piccolo ed è proporzionale a $\sin \theta_0$. Ma anche raggiungendo per la lunghezza d'onda il valore $\lambda = 1$, si ha sempre $| r | < 0.05$. Ciò significa che, quantunque la soluzione esatta (22) non possa rappresentare un'onda puramente progressiva, tuttavia, quando la lunghezza d'onda non supera l'unità, l'onda generata a $\theta = 0$ si propaga con ottima approssimazione secondo la (25), dando luogo ad un'onda riflessa molto debole, che ad essa si sovrappone.

Infine non va passato sotto silenzio il fatto che nell'onda (17) H_ρ diviene infinita per $\rho \to 0$, mentre nell'onda (19) E_ρ diviene infinita per $\rho \to \infty$. È questa una ragione di più per limitare il campo, che si aggiunge a quella dell'irrealizzabilità di valori della costante dielettrica al di fuori di un determinato intervallo.

Il caso è analogo a quello delle onde evanescenti, che non possono sussistere in un dielettrico omogeneo indefinito, perchè la loro ampiezza tende esponenzialmente all'infinito in una data direzione. E, come avviene in quel caso, potremo pensare che il nostro dielettrico sia opportunamente limitato da una superficie, che lo divide da un altro dielettrico, omogeneo o no. In questo secondo dielettrico deve sussistere un campo elettromagnetico, che si raccordi all'onda *TEM* lungo la superficie di separazione, senza dar luogo a discontinuità delle componenti tangenziali. La discussione dei casi nei quali questo campo elettromagnetico può esistere e la determinazione della sua forma esulano dal presente studio.

Modi semplici TE guidati.

Può avere qualche interesse, anche in vista dell'applicazione ai raccordi curvi fra guide d'onda, l'esame dei modi semplici *TE* guidati.

Torniamo al caso in cui le componenti del campo non nulle sono rappresentate dalle (7), (8), (10) e poniamo che il mezzo sia limitato da due pareti metalliche cilindriche coassiali rappresentate da $\rho = r_0 + a/2$ e $\rho = r_0 - a/2$ rispettivamente. La funzione $R(\rho)$ deve annullarsi per questi due valori dell'argomento. Poichè la soluzione generale della (11) è data da

$$R = A \sin(\alpha \log \rho + \beta) \tag{34}$$

con A e β costanti, si trovano subito gli autovalori

$$\alpha = \alpha_m = \frac{m\pi}{\log \dfrac{r_0 + a/2}{r_0 - a/2}} \tag{35}$$

con m intero. Va da sè poi che il campo può essere ulteriormente limitato da due pareti metalliche piane perpendicolari all'asse z (e quindi al campo elettrico). Si ottiene così una guida d'onda a sezione rettangolare e ad asse curvo (circolare). I modi studiati sono modi TE_{mo} della guida.

La propagazione di questi modi dipende dalla (12), che ora si scrive

$$T'' + \left(\frac{k^2}{\cos^2\theta} - \alpha^2{}_m\right) T = 0 \,. \tag{36}$$

Applicando la ben nota teoria del metodo *WKB* [11] si vede che si tratta di modi che effettivamente si propagano (a parte, naturalmente, una debole onda riflessa, come nel caso *TEM*) per qualsiasi valore di θ interno all'intervallo $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, quando $\alpha_m < k$. Invece quando $\alpha_m > k$ si ha un curiosissimo fenomeno, che non trova riscontro nelle guide ordinarie. Infatti, posto $\theta_1 = |\arccos (k/\alpha_m)|$, il modo, generato nella regione $\theta < -\theta_1$, da prima si propaga, quindi diviene attenuato nella regione $-\theta_1 < \theta < \theta_1$ e infine torna a propagarsi nella regione $\theta > \theta_1$. Naturalmente si ha in questo caso una notevole riflessione dell'onda originaria. La teoria del metodo *WKB* insegna come raccordare fra loro le funzioni d'onda nelle tre regioni; ma non è il caso qui di entrare in tali particolari.

Notiamo che la condizione $\alpha_m < k$ per i modi che si propagano in tutta la guida fornisce, in base alla (35)

$$a > 2r_0 \tanh\left(\frac{m\lambda}{4}\right) \tag{37}$$

essendo λ la lunghezza d'onda nello spazio libero. Questa condizione per la larghezza minima della guida corrisponde a quella usuale per i modi TE_{mo} in una guida d'onda rettangolare vuota. Osserviamo che, quando λ è piccola rispetto all'unità, la (37) può scriversi $a > r_0 m\lambda/2$. E poichè in pratica r_0 è necessariamente minore dell'unità, si vede che in questo caso la condizione ottenuta è meno restrittiva di quella usuale $a > m\lambda/2$.

Si può concludere che, qualora si sappia produrre con sufficiente precisione il dielettrico stratificato, la guida d'onda descritta può costituire un buon raccordo curvo fra due guide rettangolari eguali, aventi diversa direzione ed eccitate con un modo TE_{mo}. Naturalmente si avrebbero due riflessioni agli estremi del raccordo, ma non intendiamo addentrarci in questa discussione.

(11) Vedi: L. I. Schiff, *Quantum Mechanics* (New York, 1949) p. 178 e sgg.