# Bollettino Unione Matematica Italiana



Roberto Conti


## Sulla prolungabilità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie.


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **11** (1956), n.4, p. 510–514.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_4_510_0>

# Sulla prolungabilità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie.

Nota di ROBERTO CONTI (a Firenze)

**Sunto.** - *Facendo seguito ad una Nota dello stesso A. pubblicata nel precedente fascicolo di questo Bollettino si dà un nuovo e più generale criterio di prolungabilità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie.*

*A tale criterio si perviene mediante l'introduzione di una certa funzione V seguendo un indirizzo inaugurato da* A. M. LIAPUNOV *per le sue ricerche sulla stabilità e ripreso negli ultimi anni da altri AA. per studiare proprietà di unicità e di limitatezza delle soluzioni.*

**1.** L'idea di collegare ad un sistema di equazioni differenziali

$$dx_i / dt = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

una funzione $V(t, x_1, \dots, x_n)$ in modo da tradurre talune proprietà della funzione stessa in proprietà delle soluzioni del sistema risale ad A. M. LIAPUNOV che su di essa ha fondato il cosidetto « secondo metodo » della teoria della stabilità [1].

Solo a distanza di molti anni si è pensato di impiegare opportune funzioni $V$ per studiare proprietà delle soluzioni di un sistema diverse dalla stabilità [2].

[1] M. A. LIAPOUNOFF, *Problème général de la stabilité du mouvement,* « Ann. Fac. Sci. Toulouse », (2) 9 (1907), 27-474; v. in particolare p. 256 e segg. Cfr., anche per la bibliografia sul « secondo metodo » : G. SANSONE e R. CONTI, *Equazioni differenziali non lineari,* Monografie Matematiche del C. N. R, 3, Roma 1956; in particolare Cap. IX, § 1.

[2] Per l'unicità delle soluzioni si veda: H OKAMURA, a) *Sur l'unicité des solutions d'un système d'équations différentielles ordinaires,* « Mem. Coll. Sci- Kyoto Imp. Univ. », Series A. 23 (1941), 225-231; b) *Condition nécéssaire et suffisante remplie par les équations différentielles ordinaires sans points de* PEANO, ibid. 24 (1942), 21-28; K. HAYASHI - T. YOSHIZAWA, *New treatise of solutions of a system of ordinary differential equations and its applications to the uniqueness theorems,* ibid., 26 (1951), 225-233.

Per la limitatezza delle soluzioni si veda: T. YOSHIZAWA, a) *Note on the boundedness of solutions of a system of differential equations,* ibid., 28 (1953), 293-298; b) *Note on the boundedness and the ultimate boundedness of solutions of* x' = F(t, x), ibid., 29 (1955), 275-291; K. HAYASHI, *On transformations of differential equations,* ibid., 28 (1954), 313-325.

In questo ordine di idee ci occuperemo in questa Nota della proprietà di prolungabilità delle soluzioni pervenendo ad un criterio nel quale è possibile inquadrare tutti quelli precedentemente noti.

Passiamo ora a precisare i termini della questione.

**2.** Il sistema di $n \geq 1$ equazioni differenziali ordinarie lo scriviamo in notazioni vettoriali

$$\dot{x} = f(t, x) \qquad (\dot{x} = dx/dt) \tag{1}$$

indicando con $t$ un numero reale, $a < t < b$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, e con $x$ un vettore di componenti $x_1, \dots, x_n$ reali. Il simbolo $f$ indica un vettore di componenti $f_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n)$ reali definite nell'insieme

$$S: \quad -\infty \leq a < t < b \leq +\infty \quad , \quad 0 \leq \Sigma x_i^2 < +\infty$$

dell'$E_{n+1}$ euclideo ; le $f_i$ saranno supposte continue rispetto al punto $(t, x_1, \dots, x_n)$ cosicchè per ogni punto $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \in S$ passa almeno una soluzione $x = x(t)$ del sistema (1).

Detto $t_0^+$ l'estremo superiore dei valori $t$ per cui una soluzione è definita e $t_0^-$ l'estremo inferiore di tali valori, avremo $a \leq t_0^- < t_0^+ \leq b$ e si dirà che la soluzione considerata è prolungabile in futuro se $t_0^+ = b$ è che non è prolungabile in futuro se invece $t_0^+ < b$.

*Nel n. 4 daremo appunto un criterio, basato sull'introduzione di un'opportuna funzione* $V(t, x_1, \dots, x_n)$ *associata al sistema, per la prolungabilità delle soluzioni e mostreremo poi (n. 5) in quali rapporti il criterio trovato si trovi con quelli preesistenti.*

**3.** Ciò premesso dimostriamo il seguente

LEMMA [3]. *Sia* $\omega(t, u)$ *una funzione reale definita per* $(t, u) \in S_1$ *con*

$$S_1: \quad a < t < b \quad , \quad 0 < u < +\infty$$

*ivi continua ; sia* $u_0(t)$ *l'integrale superiore dell'equazione*

$$\dot{u} = \omega(t, u) \tag{2}$$

[3] Ad una limitazione analoga a quella fornita dal presente Lemma, sebbene ottenuta in ipotesi diverse dalle nostre e per taluni aspetti più restrittive, seguendo un metodo diverso dal nostro, perviene TOKUI SATO, col teorema 17 del lavoro: *Sur l'équation intégrale non linéaire de* VOLTERRA, « Compositio Math. », 11 (1953), 271-290.

*uscente dal punto* $Q_0 = (t_0, u_0)$ *di* $S_1$ *e sia* $T_0^+$ *l'estremo superiore dei valori di* t *per cui* $u_0(t)$ *è definito.*

*Sia* $V(t, x) = V(t, x_1, \ldots, x_n)$ *una funzione reale definita in* S, *ivi continua con le derivate prime e non negativa.*

*Valga la disuguaglianza* (4)

$$V_x(t, x)f(t, x) + V_t(t, x) \leq \omega(t, V(t, x)) \tag{3}$$

*in tutti i punti* $(t, x) \in S$ *nei quali la* $V(t, x)$ *è positiva ed esista inoltre un punto* $(t_0, x^0)$ *tale che*

$$V(t_0, x^0) = u_0 . \tag{3'}$$

*In queste condizioni per ogni soluzione* $x = x(t)$ *del sistema*

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1}$$

*uscente dal punto* $P_0 = (t_0, x^0) \in S$ *si ha*

$$V(t, x(t)) \leq u_0(t), \qquad t_0 \leq t < T_0^+ . \tag{4}$$

Si prenda $t_1$ ad arbitrio, tale che $t_0 < t_1 < T_0^+$; esiste (5) un $\varepsilon_1 > 0$, dipendente da $t_1$, tale che l'integrale superiore $u_0(t, \varepsilon)$ di

$$\dot{u} = \omega(t, u) + \varepsilon \tag{5}$$

uscente da $Q_0 = (t_0, u_0)$ è definito per $t_0 \leq t \leq t_1$, per ogni $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ ed è inoltre

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} u_0(t, \varepsilon) = u_0(t)$$

uniformemente rispetto a $t \in [t_0, t_1]$.

Per provare la (4) basta far vedere che se $x(t)$ è una soluzione del sistema (1) uscente da $P_0 = (t_0, x^0) \in S$, soddisfacente la (3'), è per $t_0 \leq t \leq t_1$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$

$$V(t, x(t)) \leq u_0(t, \varepsilon) . \tag{6}$$

Da questa seguirà, per $\varepsilon \to 0^+$, $V(t, x(t)) \leq u_0(t)$ per $t_0 \leq t \leq t_1$ e quindi, data l'arbitrarietà di $t_1$, per $t_0 \leq t < T_0^+$, cioè la (4).

(4) Il simbolo $V_x$ sta ad indicare il vettore di componenti $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$ e $V_x f$ indica il prodotto scalare del vettore $V_x$ per il vettore $f$.

(5) Cfr. E. KAMKE, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig, 1930; p. 83. La dimostrazione del Lemma segue da vicino quella del Teorema I della nostra Nota: *Limitazioni « in ampiezza » delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali*, apparsa nel precedente fascicolo di questo Bollettino; la riportiamo principalmente per comodità del lettore.

Procediamo per assurdo e perciò, avendo fissato $t_1$ ed $\varepsilon_1 > 0$, ammettiamo che esista un $\varepsilon_2$, $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$, ed un qualche valore di $t \in [t_0, t_1)$, per cui la (6) non vale ossia per cui $V(t, x(t)) > u_0(t, \varepsilon_2)$.

Detto $t_2$ l'estremo inferiore di tali valori di $t \in [t_0, t_1)$ avremo, per la continuità di $V(t, x(t))$

$$V(t_2, x(t_2)) = u_0(t_2, \varepsilon_2) \tag{7}$$

ed esisteranno numeri $h > 0$, prossimi a zero quanto si vuole, tali che

$$V(t_2 + h, x(t_2 + h)) > u_0(t_2 + h, \varepsilon_2)$$

e quindi avremo

$$dV(t, x(t))/dt\,|_{t=t_2} \geq du_0(t, \varepsilon_2)/dt\,|_{t=t_2}.$$

D'altronde avendosi per ogni soluzione $x = x(t)$ di (1)

$$dV(t, x(t))/dt = V_x(t, x(t))f(t, x(t)) + V_t(t, x(t)),$$

segue, tenendo presente la (7)

$$\begin{aligned} V_x(t_2, x(t_2))f(t_2, x(t_2)) + V_t(t_2, x(t_2)) &\geq du_0(t, \varepsilon_2) / dt \mid_{t=t_2} = \\ = \omega(t_2, u_0(t_2, \varepsilon_2)) + \varepsilon_2 &= \omega(t_2, V(t_2, x(t_2))) + \varepsilon_2, \end{aligned}$$

e quindi, essendo $\varepsilon_2 > 0$, si ha

$$V_x(t_2, x(t_2))f(t_2, x(t_2)) + V_t(t_2, x(t_2)) > \omega(t_2, V(t_2, x(t_2))).$$

Ma poichè $u_0(t, \varepsilon_2)$ è (per $t_0 \leq t < t_1$ e in particolare) per $t = t_2$ necessariamente positivo, cosicchè $V(t_2, x(t_2)) > 0$, l'ultima disuguaglianza scritta contrasta la (3).

**4.** Dal Lemma ora dimostrato deriva subito il criterio di prolungabilità enunciato in principio:

TEOREMA. - *Valgano le ipotesi del Lemma ed inoltre la* (3) *e la* (3') *valgano per una funzione* V(t, x) *tale che*

$$\lim_{||x|| \to +\infty} V(t, x) = +\infty, \qquad (||x|| = \sqrt{\Sigma x_i^2}). \tag{8}$$

*Se, con le notazioni usate nell'enunciato del Lemma, è* $T_0^+ = b$, *allora le soluzioni del sistema*

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1}$$

*uscenti da* $P_0 = (t_0, x^0)$ *sono tutte prolungabili in futuro* (n. 1).

Infatti se una di tali soluzioni, $x(t)$, non fosse prolungabile si avrebbe per essa $t_0^+ < b = T_0^+$ e quindi anche (⁶)

$$\lim_{t \to t_0^+} \|x(t)\| = +\infty$$

e per l'ipotesi (8) la $V(t, x(t))$ assumerebbe in ogni intorno sinistro di $t_0^+$ valori maggiori di qualunque numero prefissato. Ma allora non varrebbe la (4).

5. M. A. KRASNOSEL'SKIĬ ed S. G. KREĬN (⁷) hanno studiato la prolungabilità delle soluzioni di un sistema (1) con $-\infty < t < +\infty$, con $x$ variabile in uno spazio $E$ di BANACH e con $f(t, x)$ operatore continuo, $f \in E$.

Nel caso particolare che $E$ sia il nostro $E_{n+1}$ euclideo il risultato dei due AA. si riduce al nostro Teorema del n. 4, nel caso particolare che 1) $V(t, x)$ sia indipendente da $t$; 2) sia $\omega(t, u) = \lambda(t)h(u)$, con $\lambda(t)$, $h(u)$ funzioni continue non negative per $-\infty < t < +\infty$, $0 \leq u$, rispettivamente e con

$$\int^{+\infty} \frac{du}{h(u)} = +\infty .$$

Se invece si mantengono sulla $\omega(t, u)$ le ipotesi generali del Lemma e si particolarizza la $V(t, x)$ prendendo la « ampiezza »

$$V(t, x_1, \dots, x_n) = (\sum_1^n {}_i x_i^2)^{1/2}$$

allora si ottengono, nel campo reale, il Teorema 1 ed il Corollario 1 della nostra Nota citata in (⁵). Come si è osservato in detta Nota il Corollario ora ricordato comprende come caso particolare il noto criterio di prolungabilità di A. WINTNER (⁸).

Possiamo ora aggiungere che tale Corollario include anche i risultati relativi alla prolungabilità contenuti in un recente lavoro di R. V. PETROPAVLOVSKAJA (⁹) di cui siamo venuti a conoscenza dopo la pubblicazione della Nota stessa.

(⁶) In virtù di un teorema di K. MAYRHOFER, *Über die Enden der Integralkurven bei gewöhnlichen Differentialgleichungen*, « Monatsh. f. Math. u. Phys. », 41 (1934), 183-187; cfr. anche G. SANSONE - R. CONTI, Op. cit. in (¹), Cap. I, § 1.

(⁷) M. A. KRASNOSEL'SKIĬ - S. G. KREĬN, *Teoremi di esistenza non locale e teoremi di unicità per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie*, « Doklady Akad Nauk SSSR », 102 (1955), 13-16 (russo).

(⁸) A. WINTNER, *The infinities of the non-local existence problem of ordinary differential equations*, « Am Jour. of Math. », 68 (1946), 173-178.

(⁹) R. V. PETROPAVLOVSKAJA, *Sulla prolungabilità delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali*, « Vestnik Leningr. Univ. », N. 7, Serija Mat. Meh. i Astron., 1956, 40-59 (russo) in particolare cfr. il teorema 1.