
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MARIA ANTONIETTA BARATTA

**Sopra un problema non lineare di
propagazione del calore in un mezzo dotato
di simmetria sferica.**

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 11
(1956), n.3, p. 427–431.

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_3_427_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_3_427_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sopra un problema non lineare di propagazione del calore in un mezzo dotato di simmetria sferica.

Nota di MARIA ANTONIETTA BARATTA (a Parma)

Sunto. - *Si determina la distribuzione della temperatura in una sfera ed in una crosta sferica, concentriche, supponendo che fra le due superficie in contatto vi sia una « resistenza termica » funzione della differenza delle temperature superficiali dei due gruppi in contatto. Si estendono così alcuni risultati, in precedenza stabiliti, nel caso dello strato piano e del manicotto cilindrico.*

1. - Introduzione.

In recenti lavori ho risolto il problema non lineare, unidimensionale, relativo alla ripartizione del calore fra due mezzi, isotropi ed omogenei, riempienti rispettivamente due semispazi aventi in comune il piano origine [1] ⁽¹⁾, oppure un cilindro ed un manicotto cilindrico coassiali [2], nell'ipotesi che fra le due superficie, in contatto diretto, esistesse una distribuzione di sorgenti di calore variabili col tempo, ed una « resistenza termica di contatto » funzione, oltre che di altri parametri, del salto termico esistente sulle superficie in contatto dei due corpi.

Tali lavori presero lo spunto da alcuni risultati conseguiti da R. MANN, F. WOLF, e B. MANFREDI in cui si consideravano problemi riguardanti lo scambio di calore fra un solido e un fluido nell'ipotesi che il coefficiente di conducibilità fra i due mezzi non fosse costante, ma funzione della temperatura superficiale del solido.

Per completare lo studio di questi problemi non lineari unidimensionali restava da considerare, dopo i casi suddetti, anche quello sferico. Ci è parso perciò non privo di qualche interesse riassumere, in questa breve nota, i risultati relativi alla determinazione, istante per istante, della temperatura in ogni punto di due mezzi occupanti rispettivamente una sfera ed una crosta sferica concentriche nel caso che fra le due superficie in contatto

⁽¹⁾ I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia posta alla fine del lavoro.

esista una distribuzione di sorgenti di calore variabili col tempo ed una « resistenza termica di contatto » funzione della differenza Φ delle temperature superficiali dei due corpi in contatto.

Anche in questo caso, com'è ben naturale, usando la trasformata di LAPLACE, si mostra come il problema viene ricondotto alla risoluzione di un'equazione integrale non lineare di VOLTERRA di seconda specie, nella incognita funzione Φ .

2. - Espressione della temperatura nei due mezzi in funzione del salto termico Φ .

Siano S_1 ed S_2 due mezzi omogenei e termicamente isotropi riempienti rispettivamente una sfera di raggio a ed una crosta sferica concentrica di raggi a e b ($a < b$).

Fissato un sistema di coordinate sferiche con polo nel centro comune O dei due corpi, penseremo le temperature in S_i ($i = 1, 2$), in ogni istante, funzione del posto soltanto tramite la distanza r del punto considerato dal punto O (problema unidimensionale).

Usando le notazioni e le posizioni dei precedenti lavori, [1], [2], il problema di trovare la distribuzione della temperatura in ogni punto di S_i , ed in ogni istante t , porta a risolvere i seguenti sistemi differenziali

$$\begin{aligned}
 \text{(A)} \quad & \left\{ \begin{array}{ll} U_{rr}^{(1)} + 2r^{-1} U_r^{(1)} = U_t^{(1)}, & \text{in } S_1, \quad t > 0, \\ k_1 U_r^{(1)} = C_1 T - G, & r = a, \quad t > 0, \\ U^{(1)} = 0, & \text{in } S_1, \quad t = 0; \end{array} \right. \\
 \text{(B)} \quad & \left\{ \begin{array}{ll} U_{rr}^{(2)} + 2r^{-2} U_r^{(2)} = U_t^{(2)}, & \text{in } S_2, \quad t > 0, \\ k' U_r^{(2)} = G - C_2 T, & r = a, \quad t > 0, \\ k_2 U_r^{(2)} = -F_0, & r = b, \quad t > 0, \\ U^{(2)} = 0, & \text{in } S_2, \quad t = 0, \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

dove, come richiede la natura del problema in esame, supporremo

$$U^{(i)}, \quad U_r^{(i)}, \quad U_{rr}^{(i)}, \quad U_t^{(i)}, \quad (i = 1, 2)$$

funzioni continue delle loro variabili, limitate, per ogni $0 \leq r \leq b$ e $t \geq 0$.

Per le funzioni $G(\Phi)$, $T(t)$, valgono le stesse ipotesi formulate per la risoluzione del problema cilindrico [2].

Applicando ai sistemi (A) e (B) la trasformata di LAPLACE, con facili calcoli, si trova che soddisfano ai sistemi trasformati le funzioni

$$(1) \quad \bar{U}^{(1)} = \frac{a^2(C_1 \bar{T} - \bar{G}) \sinh rs}{k_1 r (as \cdot \cosh as - \sinh as)} = \frac{a^2(C_1 \bar{T} - \bar{G})}{k_1 r} \varphi(a, r, s)$$

$$(2) \quad \bar{U}^{(2)} = \frac{a^2(C_2 T - \bar{G})[(sb+1)e^{(r-b)s} + (sb-1)e^{(b-r)s}]}{k' r [(sb-1)(sa+1)e^{(b-a)s} - (sb+1)(sa-1)e^{(a-b)s}]} - \\ - \frac{F_0 b^2 [(sa+1)e^{(r-a)s} + (sa-1)e^{(a-r)s}]}{k_2 r s^2 [(sb-1)(sa+1)e^{(b-a)s} - (sb+1)(sa-1)e^{(a-b)s}]} = \\ = \frac{a^2(C_2 \bar{T} - \bar{G})}{k' r} \psi(a, b, r, s) - \frac{F_0 b^2}{k_2 r s^2} \chi(a, b, r, s).$$

Si può facilmente provare che le funzioni $\varphi(a, r, s)$, $\psi(a, b, r, s)$, $\chi(a, b, r, s)$, risultano continue e positive, singolari per $s \rightarrow 0$, nulle per $s \rightarrow \infty$. Risultano quindi antitrasformabili e le loro antitrasformate soddisfano alle limitazioni ([3], pag. 65)

$$\mathcal{L}^{-1}\varphi(a, r, s) < A_1 e^{\varepsilon_1 t}, \quad \mathcal{L}^{-1}\psi(a, b, r, s) < A_2 e^{\varepsilon_2 t}, \quad \mathcal{L}^{-1}\chi(a, b, r, s) < A_3 e^{\varepsilon_3 t},$$

con $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, costanti positive, comunque fissate.

Ponendo per brevità

$$F(a, r, t) = \mathcal{L}^{-1}\varphi(a, r, s), \quad V(a, b, r, t) = \mathcal{L}^{-1}\psi(a, b, r, s), \\ Z(a, b, r, t) = \mathcal{L}^{-1}s^{-2}\chi(a, b, r, s),$$

e invertendo la (1) e la (2) mediante il teorema di BOREL ([4], pag. 224; [5], pag. 33) si ottengono le soluzioni dei sistemi (A) e (B) sotto forma di prodotto integrale

$$(3) \quad U^{(1)} = \frac{a^2(C_1 T - G)}{k_1 r} * F(a, r, t),$$

$$(4) \quad U^{(2)} = \frac{a^2(C_2 T - G)}{k' r} * V(a, b, r, t) - \frac{F_0 b^2}{k_2 r} Z(a, b, r, t),$$

o, ciò che è lo stesso, nella forma

$$(5) \quad U^{(1)} = \int_0^t \frac{a^2 [C_1 T(\tau) - G(\Phi(a, \tau))]}{k_1 r} F(a, r, t - \tau) d\tau,$$

$$(6) \quad U^{(2)} = \int_0^t \frac{a^2 [C_2 T(\tau) - G(\Phi(a, \tau))]}{k' r} V(a, b, r, t - \tau) d\tau - \\ - \frac{F_0 b^2}{k_2 r} Z(a, b, r, t).$$

Le equazioni (5) e (6) danno la legge di distribuzione delle temperature in S_1 in funzione del salto termico Φ .

3. - Riduzione del problema ad un'equazione integrale non lineare.

Dalle (3) e (4) calcolando $U^{(1)}$ e $U^{(2)}$ rispettivamente in punti P_1 di S_1 e P_2 di S_2 appartenenti alla stessa semiretta uscente da O e simmetrici rispetto alla superficie $r = a$, si ha

$$(7) \quad U^{(2)} - U^{(1)} = \frac{a^2 (C_2 T - G)}{k' r} * V(a, b, r, t) - \\ - \frac{a^2 (C_1 T - G)}{k_1 r} * F(a, b, r, t) - \frac{F_0 b^2}{k_2 r} Z(a, b, r, t).$$

Poichè, per ipotesi, le $U^{(i)}$ sono continue rispetto ad r e la G è indipendente da r , passando al limite in entrambi i membri della (7) per $r \rightarrow a$, si ottiene

$$(8) \quad \Phi(a, t) = U_{(a, t)}^{(2)} - U_{(a, t)}^{(1)} = \frac{a^2 (C_2 T - G)}{k' a} * \lim_{r \rightarrow a} V(a, b, r, t) - \\ - \frac{a^2 (C_1 T - G)}{k_1 a} * \lim_{r \rightarrow a} F(a, b, r, t) - \frac{F_0 b^2}{k_2 a} \lim_{r \rightarrow a} Z(a, b, r, t).$$

Ricordando le (5) e (6) si ha, per il salto termico Φ , la seguente

espressione :

$$(9) \quad \Phi(a, t) \approx \int_0^t \frac{a^2 [C_2 T(\tau) - G(\Phi(a, \tau))]}{k'a} V(a, b, t - \tau) d\tau - \\ - \int_0^t \frac{a^2 [C_1 T(\tau) - G(\Phi(a, \tau))]}{k_1 a} F(a, b, t - \tau) d\tau - \frac{F_0 b^2}{k_2 a} Z(a, b, t).$$

Posto

$$(10) \quad \mu(a, b, t) = \int_0^t \frac{a^2 T(\tau) [C_2 k_1 V(a, b, t - \tau) - C_1 k' F(a, b, t - \tau)]}{k' k_1 a} d\tau, \\ - \frac{F_0 b^2}{k_2 a} Z(a, b, t),$$

$$(11) \quad \sigma(a, b, t) = \frac{a^2 [k' F(a, b, t) - k_1 V(a, b, t)]}{k_1 k' a}$$

dalla (9) si ha

$$(12) \quad \Phi(a, t) = \mu(a, b, t) + \int_0^t G(\Phi(a, \tau)) \cdot \sigma(a, b, t - \tau) d\tau.$$

La (12) è, quindi, nell'incognita funzione Φ , un'equazione integrale non lineare di VOLTERRA di seconda specie, come si constata, risultando le funzioni (10) e (11) limitate per ogni t finito,

Come nel precedente lavoro ([1], pag. 368-371) si può dimostrare che la condizione (12) è anche sufficiente per la risoluzione del nostro problema.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. A. BARATTA, *Sopra un problema non lineare di ripartizione del calore*, « Rivista Mat. Univ. ». Parma 5, 363-371 (1954).
- [2] M. A. BARATTA, *Sopra un problema cilindrico non lineare di ripartizione del calore*, « Rivista Mat. Univ. » Parma 6, 287-299 (1955).
- [3] G. DOETSCH, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, « Dover Pubbl. », New York 1953.
- [4] G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Parte II, N. Zanichelli, Bologna 1941.
- [5] A. GHIZZETTI, *Calcolo Simbolico*, N. Zanichelli, Bologna 1943.