Bellino Antonio Rosina

Sul numero dei circuiti dispari delle curve algebriche rali situate sopra superficie algebriche d'ordine dispari prive di signolarità.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.3, p. 419–421.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_3_419_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1956.

Sul numero dei circuiti dispari delle curve algebriche reali situate sopra superficie algebriche d'ordine dispari prive di singolarità.

Nota di BELLINO ANTONIO ROSINA (a Ferrara)

Sunto. - *È contenuto nel n. 1.*

1. In questa Nota estendo ad una curva algebrica reale senza punti multipli situata sopra una superficie algebrica d'ordine dispari, priva di singolarità, un risultato dato da M. PIAZZOLLA BELOCH nel caso che si tratti di una superficie cubica ([1]) ed esteso poi da A. COMESSATTI per il caso di una superficie razionale reale rappresentabile realmente sul piano (quindi ad una sola falda), mediante un sistema lineare Σ di curve d'ordine dispari privo di curve fondamentali reali, e i cui punti base reali siano distinti, impropri e di molteplicità dispari ([2]).

2. Sia dunque F la superficie algebrica data, reale, d'ordine dispari e priva di singolarità.

Essa ha quindi una ed una sola falda dispari, che secondo STAUDT è unilatera ([3]), ed eventuali falde pari di seconda specie ([4]).

([1]) vedi *a)* M. PIAZZOLLA BELOCH, *Sur le nombre des branches impaires des courbes appartenant à une surface du troisième ordre.* « Comptes Rendus Académie des Sciences », Paris. T. 189, (1929), p. 1226.

b) M. PIAZZOLLA BELOCH, *Sulla configurazione delle curve situate sopra una superficie generale del terzo ordine con 27 rette reali,* « Rendiconti Circolo Matematico di Palermo », T. 55, (1931), pag. 1-20.

c) M. PIAZZOLLA BELOCH, *Topologia delle curve situate sopra superficie generali del terzo ordine con meno di 27 rette reali,* « Rend. Acc. dei Lincei », Serie VIII, fasc 6, 1950, pag. 576-578.

([2]) v. A. COMESSATTI, *Sui circuiti dispari delle curve algebriche reali tracciate sopra superficie razionali,* « Bollettino U. M. I. » vol. XXII. 1933, pag. 289-293.

([3]) v. STAUDT, *Geometrie der Lage,* Nürnberg, 1847, § 12.

([4]) v. F. KLEIN, *Flächen dritter Ordnung,* § 17, « Math Annalen », Bd. 6, 1873, (551-581), 577 ; *Gesammelte Mathematische Abhandlungen,* XXXV. Secondo KLEIN le falde d'ordine pari si distinguono in falde che contengono dei circuiti d'ordine dispari (falde pari di prima specie) e falde che non ne contengono (falde pari di seconda specie); come esempio delle falde pari della prima specie si ha l'iperboloide, e come esempio di quelle della seconda specie l'ellissoide.

Su queste ultime non si possono tracciare dei circuiti dispari ([5]), quindi se si suppone data sulla superficie F una curva algebrica C ogni circuito dispari facente parte di questa sarà situato sulla falda dispari della superficie.

Se C possiede più di un circuito dispari essi non si interse-cheranno essendo per ipotesi la curva C priva di punti multipli.

Possiamo ancora osservare che ognuno di questi circuiti, sulla (falda dispari della) superficie è unilatero ([6]).

Dicendo d il numero dei circuiti dispari della curva C (situati sulla falda d'ordine dispari di F) che, come abbiamo constatato sono unilateri e a due a due non intersecantisi, e indicando con z l'ordine di connessione della falda dispari, per questi circuiti vale dunque la proprietà di topologia generale ([7]) che cioè sopra una superficie (topologica) d'ordine di connessione z possono tracciarsi al massimo z circuiti unilateri a due a due non intersecantisi. Sarà dunque $d \leq z$, e possiamo concludere:

Il numero dei circuiti dispari di una curva algebrica reale C *(d'ordine qualunque) priva di punti multipli, situata sopra una superficie algebrica reale d'ordine dispari priva di singolarità, non può superare l'ordine di connessione* z *della falda dispari della superficie* ([8]) *che è poi l'ordine di connessione della superficie stessa, se questa è a una sola falda.*

([5]) v. loc cit. 4)

([6]) v. p. es V. E. Galafassi, *I tactinvarianti nella topologia dello spazio proiettivo*, « Bollettino U. M. I. », Serie III, Anno III, 1948, (pag. 18-24), dove si trova enunciata esplicitamente e dimostrata la proprietà (che secondo il Galafassi è da ritenersi nota) che cioè su una falda dispari di una superficie generale di ordine dispari, priva di singolarità, un circuito è pari o rispettivamente dispari secondo che sia bilatero o unilatero e reciprocamente.

([7]) cfr. A. Comessatti, loc. cit. 2), dove della suddetta proprietà è data una dimostrazione aritmetica.

([8]) Così se si tratta di una superficie generale del terzo ordine a due falde, cioè un'ovale ed una falda dispari, siccome quest'ultima si può proiettare in modo biunivoco senza eccezioni sopra un piano π opportunatamente scelto (v. M. Piazzolla Beloch, lot. cit. 1_c), il suo ordine di connessione è uguale a quello del piano proiettivo cioè 1, e ogni curva algebrica d'ordine n tracciata sulla F considerata, ha uno e un sol circuito d'ordine dispari se n è dispari, non ne ha alcuno se n è pari (v. loc. cit. 1_c).

3. All'enunciato di questo teorema possiamo dare un'altra forma introducendo l'ordine di connessione della data superficie F composta di una falda dispari e di un certo numero (≥ 0) di falde pari di seconda specie.

Indicando con m il numero totale delle falde ed osservando che le falde pari di seconda specie, topologicamente appartengono al tipo sfera e quindi ognuna ha l'ordine di connessione zero, la formula che dà l'ordine di connessione Z della superficie (9) si riduce a:

$$Z = z - 2m + 2 \tag{1}$$

dove z è l'ordine di connessione della falda dispari. Dalla (1) si ha:

$$z = Z + 2m - 2$$

e dovendo essere, per quanto si è dimostrato al n. 2, $d \leq z$, sarà:

$$d \leq Z + 2(m - 1)$$

dove $m - 1 \geq 0$ ed avendo d il significato di cui al n. 2.

Dunque all'enunciato del teorema precedente possiamo sostituire il seguente:

Il numero dei circuiti dispari di una curva algebrica reale C (d'ordine qualunque) *priva di punti multipli, situata sopra una superficie algebrica reale, d'ordine dispari, priva di singolarità non può superare l'ordine di connessione totale della superficie aumentato del doppio del numero delle falde pari* (di II specie) *che appartengono alla superficie stessa.*

4. Del teorema del n. 2 (e del n. 3) è caso particolare quello di A. Comessatti (10) per curve situate sopra superficie razionali reali e vi si inquadra anche come fondamentale il risultato di M. Piazzolla Beloch (11) per curve sopra superficie cubiche, da cui le successive estensioni hanno preso origine.

(9) Ved. ad es. *a)* A. Comessatti: *Sulla connessione delle superficie razionali reali.* Annali di matematica pura e applicata - III serie - T. 23, pag. 238, 1915;

b) L. Brusotti: *Sull'ordine di connessione delle superficie algebriche reali.* Rend. Ist. Lombardo di scienze e lettere - vol. LXXXVIII - fasc. 1, pag. 361, 1944-45.

(10) loc. cit. (2).

(11) loc. cit. (1).