Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giuseppe Palamà

# Polinomi interi in $x$ di grado $n$ dispari che assumono $n$ volte ciascuno dei $2m$ valori $\pm N_1, \cdots, \pm N_m$.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **11** (1956), n.3, p. 368–370.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_3_368_0>

# Polinomi interi in $x$ di grado $n$ dispari che assumono $n$ volte ciascuno dei $2m$ valori $\pm N_1, \dots, \pm N_m$.

Nota di GIUSEPPE PALAMA (a Lecce)

**Sunto.** - *È contenuto nella breve introduzione che segue.*

H. L. DORWART [1] ha risolto la questione di *trovare un polinomio intero in* x *di grado* n *che per* n *valori, interi e distinti, di* x *assuma il valore* + N *e per altri* n *valori, pure distinti ed interi, assuma invece il valore* — N.

Ora vogliamo qui generalizzare la precedente questione e *cercare un polinomio intero in* x *e di grado* n, *dispari, che assuma* n *volte ciascuno dei valori* $N_1, -N_1, N_2, -N_2, \dots, N_m, -N_m$ *per n.* 2m *valori di* x *interi e fra loro distinti essendo* $N_i$ *interi opportuni.*

**1.** Si sa che la questione della ricerca di soluzioni intere del sistema di equazioni indeterminate

$$x^k{}_{1,1} + \dots + x^k{}_{1,p} = x^k{}_{2,1} + \dots + x^k{}_{2,p} = \dots = x^k{}_{m,1} + \dots + x^k{}_{m,p}\,,$$
$$(k = 1, 2, \dots, n)$$

è noto come *Problema di* PROUHET - TARRY [2] e le sue soluzioni sono date dalle cosiddette *multigrade a catena* [3].

Ora se si ha una di tali multigrade a catena del tipo (che si dice *ideale o normale* del $(2n)^{mo}$ ordine)

$$(1_1) \qquad a_{1,1}, \dots, a_{1,2n+1} \overset{2n}{=} a_{2,1}, \dots a_{2,2n+1} \overset{2n}{=} \dots \overset{2n}{=} a_{2m,1}, \dots, a_{2m,2n+1}\,,$$

[1] H L. DORWART, *Concerning certain reducible polynomials*, « Duke Math Jour », I, (Marzo 1955), pp 70-73.

[2] Cfr. G. H. HARDY and E. M. WRIGHT, *An introduction to the Theory of Numbers*, Oxford, (1954). p 328.

[3] Cfr. ad es. G. PALAMA, *Saggio di una nuova trattazione delle multigrade*, « Boll. dell'Un. Mat. It. », 3, 3, (1948), pp 262-278.

e che sta per il sistema di identità

$$a^k{}_{1,1} + \dots + a^k{}_{1,2n+1} = a^k{}_{2,1} + \dots + a^k{}_{2,2n+1} = \dots$$
$$\dots = a^k{}_{2m,1} + \dots + a^k{}_{2m,2n+1} ,$$
$$(k = 1,\ 2, \dots,\ 2n)$$

ma tale che si abbia

$$a_{1,1} + a_{2,2n+1} = a_{1,2} + a_{2,2n} = \dots = a_{1,2n+1} + a_{2,1} =$$
$$= a_{3,1} + a_{4,2n+1} = a_{3,2} + a_{4,2n} = \dots = a_{3,2n+1} + a_{4,1} =$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$= a_{2m-1,1} + a_{2m,2n+1} = a_{2m-1,2} + a_{2m,2n} = \dots$$
$$\dots = a_{2m-1,2n+1} + a_{2m,1} = 2C ,$$

con $C$ costante, sottraendo $C$ ad ogni termine della $(1_1)$, ad essa può darsi la forma

$$(2_1) \qquad b_{1,1}, \dots,\ b_{1,2n+1} \overset{2n}{=} -b_{1,1}, \dots,\ -b_{1,2n+1} \overset{2n}{=}$$
$$b_{2,1}, \dots,\ b_{2,2n+1} \overset{2n}{=} -b_{2,1}, \dots,\ -b_{2,2n+1} \overset{2n}{=}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\overset{2n}{=} b_{m,1}, \dots,\ b_{m,2n+1} \overset{2n}{=} -b_{m,1}, \dots .\ -b_{m,2n+1} .$$

Inoltre se poniamo

$$(3_1) \qquad N_1 = b_{1,1} \cdot \dots \cdot b_{1,2n+1} \quad , \quad N_2 = b_{2,1} \cdot \dots \cdot b_{2,2n+1} ,$$
$$\dots,\ N_m = b_{m,1} \cdot \dots \cdot b_{m,2n+1} ,$$

diciamo che il polinomio

$$(x - b_{1,1}) \cdot \dots \cdot (x - b_{1,2n+1}) + N_1 = (x + b_{1,1}) \cdot \dots \cdot )x + b_{1,2n+1}) - N_1 =$$
$$= (x - b_{2,1}) \cdot \dots \cdot (x - b_{2,2n+1}) + N_2 = (x + b_{2,1}) \cdot \dots \cdot (x + b_{2,2n+1}) - N_2 =$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$= (x - b_{m,1}) \cdot \dots \cdot (x - b_{m,2n+1}) + N_m = (x + b_{m,1}) \cdot \dots \cdot (x + b_{m,2n+1}) - N_m$$

soddisfa alla nostra questione.

Infatti, innanzi tutto, i polinomi di tutti i membri della precedente sono identici, perchè il termine indipendente dalla $x$ di ciascuno è, per le $(3_1)$, nullo, e perchè gli altri termini, in $x$, per le formule di GIRARD-NEWTON, e per la $(2_1)$ sono identici. Inoltre tale polinomio per

$$x = \pm b_{1,i} \quad , \quad x = \pm b_{2,i}, \ldots, \; x = \pm b_{m,i},$$

$$(i = 1, 2, \ldots, 2n+1)$$

assume rispettivamente il valore

$$\pm N_1, \; \pm N_2, \ldots, \; \pm N_m .$$

**2.** Infiniti sono gli esempi noti di multigrade del tipo della $(2_1)$, per $n = 1$, se si prescinde dalla condizione che gli $a_{i,j}$ siano fra loro diversi. ed è facile altresì scriverne con un numero arbitrario di membri.

Se ci serviamo ad esempio della

$$-37, 17, 20 \stackrel{2}{=} -20, -17, 37 \stackrel{2}{=} -35, 7, 28 \stackrel{2}{=} -28, -7, 35,$$

si ha

$$N_1 = -12\,580, \qquad N_2 = -6\,820,$$

e quindi applicando il risultato precedente si ottiene il polinomio

$$(x+37)(x-17)(x-20) - 12\,580 = (x+20)(x+17)(x-37) + 12\,580 =$$
$$= (x+35)(x-7)(x-28) - 6\,860 = (x+28)(x+7)(x-35) + 6\,860$$

che per

$$x = -37, 17, 20; \quad x = -20, -17, 37$$

$$x = -35, 7, 28; \quad x = -28, -7, 35,$$

assume rispettivamente il valore

$$-12\,580, \qquad 12\,580, \qquad -6\,860. \qquad 6\,860.$$

Per $n > 1$, sembra non siano ancora note multigrade a catena normali del $(2n)^{mo}$ ordine, con un numero di membri $m > 2$. Invece, come si sa, per $m = 2$ si conoscono multigrade normali degli ordini, pari, 2, 4, 6, 8.