BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Bianca Manfredi

Sulla stabilità del moto di sistemi a più gradi di libertà in condizioni non lineari.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.1, p. 64–71.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_1_64_0>

Sulla stabilità del moto di sistemi a più gradi di libertà in condizioni non lineari.

BIANCA MANFREDI (a Parma)

Sunto. - *Generalizzando noti criteri di* G. SESTINI *e di* H. A. ANTOSIEWICZ *si dimostrano tre criteri di stabilità per particolari moti di un sistema dissipativo in più gradi di libertà.*

1. - Introduzione.

Sia Σ un sistema materiale ad n gradi di libertà caratterizzato dalle n coordinate Lagrangiane $x_i = x_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. È noto che se si interpretano le x_i come coordinate di un punto generico P di uno spazio S_n *(spazio delle configurazioni)*, il moto di Σ è definito dal moto di P in S_n, e quindi, per assegnate condizioni iniziali (di posizione e di velocità) dal sistema differenziale normale [1] in generale non lineare

$$\ddot{x}_i = \varphi_i(t, X(t), \dot{X}(t)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

dove: $X(t)$ rappresenta l'insieme $(x_1(t), x_2(t), x_3(t), \ldots, x_n(t))$ e $\dot{X}(t)$ l'insieme $(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t), \ldots, \dot{x}_n(t))$.

Le funzioni φ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ siano dotate di tutte quelle proprietà di continuità e di regolarità che valgono ad assicurare per il sistema (1), l'esistenza e l'unicità locale dell'integrale $X(t)$, soddisfacente a condizioni iniziali arbitrariamente prefissate.

Particolare importanza ai fini Meccanici ha il ricercare, per il sistema (1), soluzioni *stabili*, soluzioni cioè per cui risultino limitate, per ogni t, $|x_i(t)|$ e $|\dot{x}_i(t)|$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

In questa Nota limiteremo tale ricerca al caso particolare, ma di notevole interesse per le pratiche applicazioni, nel quale le funzioni φ_i assumano le espressioni

$$\varphi_i(t, X(t), \dot{X}(t)) = -g_i(X(t)) - r_i(X(t), \dot{X}(t)) + f_i(t), \tag{2}$$

dove g_i, r_i e f_i sono simboli di funzioni che godono delle stesse proprietà di continuità e di regolarità di φ_i. L'importanza, sopra osservata, sta nel fatto che la (2) caratterizza sollecitazioni su Σ

(1) Si pensa senz'altro verificata la condizione sufficiente per rendere *normale* un sistema differenziale ([3], pag. 451), il numero in parentesi quadra riferendosi, come nel seguito, alla Bibliografia posta al termine del lavoro.

che risultano somma di forze puramente posizionali (per esempio, di tipo elastico o gravitazionale), di forze cinetiche (per esempio, di tipo dissipativo, generate per effetto della resistenza offerta al moto di Σ da un mezzo viscoso omogeneo o no) ed infine di azioni perturbatrici variabili solo col tempo (particolarmente importanti quelle a carattere periodico).

Osserveremo che la presenza di azioni dissipative rende ogni fenomeno meccanico irreversibile e perciò, in questi casi, si potrà parlare solo di *stabilità futura* ($t \geq 0$) ([2], pag. 466).

Un criterio generale di stabilità per il sistema (1), ove il secondo membro sia della forma (2), è già stato dato molto recentemente da SESTINI in [6].

In questa Nota si danno altri criteri di stabilità relativi a tre particolari problemi di tipo (1). Precisamente: In un primo momento si considera $r_i = \omega_i(X(t), \dot{X}(t))\dot{x}_i$, cioè si suppone che le azioni dissipative che insieme alle forze posizionali e perturbatrici interessano il moto di Σ, siano del tipo di una resistenza offerta da un mezzo non omogeneo. Successivamente si considera $g_i = \omega^2 x_i$ (ω costante) e r_i indipendente da $X(t)$, cioè si suppone che le forze posizionali siano di tipo elastico e che le forze dissipative si possano assimilare alla resistenza offerta da un mezzo omogeneo. Infine si considera $g_i = \omega^2 x_i$ (ω costante) e $r_i = 2\varepsilon\dot{x}_i + r_i'(\dot{X}(t))$ (ε costante e r_i' funzione continua e regolare con r_i), cioè si suppone Σ soggetto a forze di tipo elastico, a forze perturbatrici ed, infine, ad azioni cinetiche che risultino somma di una resistenza di tipo viscoso e di una generica azione cinetica (per esempio, resistenza idraulica, supersonica, ...).

In particolare, per $n = 1$ il primo criterio ottenuto coincide con il criterio dato da ANTOSIEWICZ [1], che rappresenta un'estensione, sotto un certo aspetto, del primo criterio dimostrato in [5]; il terzo criterio, invece, sempre per $n = 1$, coincide con il secondo criterio stabilito in [5].

2. - 1° criterio.

Per un sistema differenziale in generale non lineare, del second'ordine del tipo

$$\ddot{x}_i + \omega_i(X(t), \dot{X}(t))\dot{x}_i + g_i(X(t)) = f_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1'}$$

vale il seguente

TEOREMA. - *Se: a)* $\omega_1(X(t), \dot{X}(t)) \geq 0$ *per ogni* $(X(t), \dot{X}(t))$, *b)* $g_1(X(t)) = \dfrac{\partial G(X(t))}{\partial x_1}$ *con* $G(X(t)) > 0$ *per ogni* $X(t) \neq 0$ (²), *c)* $G(X(t)) \to +\infty$

(²) Diremo $X(t) = 0$ quando è $x_i \equiv 0$ per $i = 1, 2, \ldots, n$.

per $|x_1(t)| \to +\infty$, *d*) $|f_1(t)|$ *integrabile in* $(0, +\infty)$; *allora ogni integrale di* (1') *che esiste in* $(0, +\infty)$ *è stabile* [3].

Infatti, moltiplicando ambo i membri di (1') per $2d\dot{x}_i$, si ha

$$d\dot{x}_i^2 + 2\omega_i(X(t), \dot{X}(t))\dot{x}_i^2 dt + 2g_i(X(t))dx_i = 2f_i(t)dx_i\,; \tag{3}$$

sommando rispetto all'indice i, si ottiene, per l'ipotesi b),

$$\sum_{i=1}^{n} d\dot{x}_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \omega_i(X(t), \dot{X}(t))\dot{x}_i^2 dt + 2dG(X(t)) = 2\sum_{i=1}^{n} f_i(t)dx_i\,;$$

integrando tra 0 e t, si ha

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i^2(t) + 2\sum_{i=1}^{n} \int_0^t \omega_i(X(\tau), \dot{X}(\tau))\dot{x}_i^2(\tau)d\tau + 2G(X(t)) = \tag{4}$$

$$= E_0 + 2\sum_{i=1}^{n} \int_0^t f_i(\tau)\dot{x}_i(\tau)d\tau$$

$$\left[E_0 = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i^2(0) + 2G(X(0)) > 0\right];$$

infine trascurando in (4) il secondo e il terzo termine del primo membro, positivi per le ipotesi a) e b), si ottiene

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i^2(t) < E_0 + 2\sum_{i=1}^{n} \int_0^t f_i(\tau)\dot{x}_i(\tau)d\tau,$$

ed anche

$$\dot{x}_i^2(t) < E_0 + 2\sum_{i=1}^{n} \int_0^t |f_i(\tau)|\,|\dot{x}_i(\tau)|\,d\tau. \tag{5}$$

Poichè $|\dot{x}_i(\tau)|$ è continua in $(0, t)$, sia t_i^* il punto di $(0, t)$ in cui $|\dot{x}_i(\tau)|$ assume il suo massimo v_i; abbiamo allora

$$v_i^2 < E_0 + 2\sum_{i=1}^{n} \int_0^{t_i^*} |f_i(\tau)|\,|\dot{x}_i(\tau)|\,d\tau,$$

[3] L'ipotesi b) equivale a supporre che le forze posizionali agenti su Σ siano di tipo conservativo; nel caso generale in cui le sollecitazioni abbiano la forma (2), come in [6], tale ipotesi resta valida comunque siano le forze posizionali, in quanto, per il teorema di CLEBSCH, la parte rotazionale del campo di forze può pensarsi inglobata nella sollecitazione espressa da $r_i(X(t), \dot{X}(t))$. In tal caso basta osservare che, ove si supponga al posto di $\omega_i \geq 0$, $r_i\dot{x}_i \geq 0$ per ogni $(X(t), \dot{X}(t))$, la dimostrazione del criterio resta inalterata.

e a più forte ragione

$$v_i^2 < E_0 + 2 \sum_{i=1}^{n} v_i \int_0^{t_i^*} | f_i(\tau) | \, d\tau,$$

e ancora

$$v_i^2 < E_0 + 2 \sum_{i=1}^{n} v_i \int_0^{t} | f_i(\tau) | \, d\tau. \tag{6}$$

D'altra parte per l'ipotesi d), detta c una costante positiva, risulta $\int_0^t | f_i(\tau) | \, d\tau < c$, qualunque sia i. Sostituendo in (6) si ha allora

$$v_i^2 < E_0 + 2c \sum_{i=1}^{n} v_i \, ; \tag{7}$$

sommando rispetto ad i, si ottiene

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 < nE_0 + 2cn \sum_{i=1}^{n} v_i \, ,$$

ed anche

$$\sum_{i=1}^{n} (v_i - nc)^2 < n(E_0 + n^2c^2). \tag{8}$$

Da (8) discende

$$(v_i - nc)^2 < n(E_0 + n^2c^2),$$

cioè (per essere $v_i > 0$)

$$0 < v_i < nc + \sqrt{n(E_0 + n^2c^2)},$$

e quindi infine

$$| \dot{x}_i(t) | < nc + \sqrt{n(E_0 + n^2c^2)} = B \, ; \tag{9}$$

si ottiene così per $| \dot{x}_i(t) |$ *una limitazione indipendente da* t.

Da (4) risulta anche la limitazione in $(0, +\infty)$ di $G(X(t))$: basta notare che da (4) segue

$$G(X(t)) < E_0 + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t f_i(\tau) \dot{x}_i(\tau) d\tau,$$

e quindi per l'ipotesi b)

$$G(X(t)) < E_0 + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t | f_i(\tau) | \, | \dot{x}_i(\tau) | \, d\tau,$$

da cui si ottiene per la (9)

$$G(\dot{X}(t)) < E_0 + nBc. \tag{10}$$

Da tale limitazione, *indipendente da* t, discende, per l'ipotesi *c*), anche la limitazione in $(0, +\infty)$ di $|x_i(t)|$, e questa, insieme alla (9), prova il criterio enunciato.

Osservazione. - Per $n = 1$ il criterio ora provato coincide con quello dato da Antosiewicz in [1]. Se inoltre poniamo:

$$\omega_1(x(t), \dot{x}(t)) \equiv \omega(\dot{x}(t)) = \begin{cases} \dfrac{\psi(\dot{x})}{\dot{x}}, & \text{per} \quad \dot{x} \neq 0 \\[2ex] \lim\limits_{\dot{x} \to 0} \dfrac{\psi(\dot{x})}{\dot{x}}, & \text{per} \quad \dot{x} = 0, \end{cases}$$

essendo $\psi(\dot{x})$ una funzione definita per ogni valore di $\dot{x}$, nulla in $\dot{x} = 0$ e ivi derivabile, $g_1(x) = a^2 x$ (a costante), la (1') coincide con l'equazione differenziale non lineare del second'ordine esaminata da Sestini in [5], ed il criterio di Antosiewicz coincide col primo criterio dato da Sestini in [5].

3. - 2° criterio.

Sia (1) del tipo

$$\ddot{x}_i + r_i(\dot{X}(t)) + \omega^2 x_i = f_i(t) \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{1''}$$

con ω costante. Per tale sistema vale il seguente

Teorema. - *Se* : $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i(\dot{X}(t)) \cdot \dot{x}_i(t) \geq 0$ *per ogni* $\dot{X}(t)$, $|f_i(t)|$ *integrabile in* $(0, +\infty)$; *allora ogni integrale di* (1'') *che esiste in* $(0, +\infty)$ *è stabile.*

Osserviamo subito che se $r_i(\dot{X}(t))$ assume la forma particolare $\omega_i(\dot{X}(t))\dot{x}_i$, il sistema (1'') è un caso particolare di (1') ed il Teorema ora enunciato rientra nel criterio 1°.

La dimostrazione del 2° criterio si ottiene facilmente procedendo in modo perfettamente analogo a quanto abbiamo fatto nel n. 2 e pertanto, per brevità, la omettiamo. Ci limitiamo ad osservare che per $n = 1$, (1'') coincide con l'equazione differenziale non lineare di [5] ed il criterio ora enunciato con il primo criterio ivi stabilito.

4. - 3° criterio.

Sia (1) del tipo

$$(1''') \qquad \ddot{x}_i + 2\varepsilon\dot{x}_i + r_i'(\dot{X}(t)) + \omega^2 x_i = f_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dove ε e ω sono costanti, r_i' è una funzione che gode delle stesse proprietà di continuità e di regolarità della φ_i di (1).

Per tale sistema vale il seguente

TEOREMA. - *Se* $\varepsilon > 0$, $r_1'(\dot{X}(t))$ *è uniformemente lipschitziana di ordine* $\alpha < 1$ *rispetto ad ogni* $\dot{x}_1$, *allora ove uno degli integrali di* (1''') *sia stabile, tutti sono stabili.*

Si può osservare che se in particolare è $r_i' \equiv 0$, (1''') è un caso particolare di (1') ed il Teorema ora enunciato rientra nel 1° criterio.

La dimostrazione di questo *3° criterio* discende come corollario dal seguente

TEOREMA. - *Se* (1'''), *nelle ipotesi del Teorema precedente, possiede integrali in* $(0, +\infty)$, *la differenza di due qualsivoglia di tali integrali resta limitata al crescere indefinito di* t.

Infatti, si indichino con $X'(t) = (x'_1(t), \ldots, x_n'(t))$ e con $X''(t) = (x_1''(t), x''_2(t), \ldots, x''_n(t))$ due integrali di (1''') definiti in $(0, +\infty)$. La loro differenza $Z(t) = (z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t))$, con $z_i(t) = x_i''(t) - x_i'(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, soddisfa al sistema

$$(11) \qquad \ddot{z}_i + 2\varepsilon\dot{z}_i + \omega^2 z_i = r'_i(\dot{X}'(t)) - r'_i(\dot{X}''(t)) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Siano ora y_i' e y_i'' due integrali indipendenti dell'equazione differenziale omogenea a coefficienti costanti ottenuta uguagliando a zero il primo membro di (11); può allora scriversi ([3], pag. 442)

$$(12) \quad z_i(t) = c_i y_i' + d_i y_i'' + \int_0^t \frac{y_i''(t)y_i'(\tau) - y_i'(t)y_i''(\tau)}{W[y_i(\tau),\ y_i''(\tau)]} \{r_i'(\dot{X}'(\tau)) - r_i'(\dot{X}''(\tau))\} d\tau,$$

dove: c_i e d_i sono costanti da determinarsi in dipendenza delle condizioni iniziali che si attribuiscono a y_i' e y_i''; $W[y_i'(t), y_i''(t)]$ indica il Wronskiano non nullo di y_i' e y_i''.

È già stato rilevato in ([5], pag. 562) che risultano limitati, al crescere indefinito di t, i due integrali

$$I_i(t) = \int_0^t \frac{y_i''(t)y_i'(\tau) - y_i'(t)y_i''(\tau)}{W[y_i'(\tau),\ y_i''(\tau)]} d\tau, \quad J_i(t) = \int_0^t \frac{\dot{y}_i''(t)y_i'(\tau) - \dot{y}_i'(t)y_i''(\tau)}{W[y_i'(\tau),\ y_i''(\tau)]} d\tau.$$

Porremo precisamente

$$I_i(t) < A_i \leq A \quad \text{e} \quad J_i(t) < B_i \leq B, \tag{13}$$

con A e B costanti positive dipendenti da ε e da ω.

Derivando la (12) rispetto a t si ottiene

$$\dot{z}_i(t) = c_i \dot{y}_i' + d_i \dot{y}_i'' + \int_0^t \frac{\dot{y}_i''(t) y_i'(\tau) - \dot{y}_i'(t) y_i''(\tau)}{W[y_i'(\tau),\, y_i''(\tau)]} \{ r_i'(\dot{X}'(\tau)) - r_i'(\dot{X}''(\tau)) \} d\tau. \tag{14}$$

Per la supposta uniforme lipschitzianità di ordine $\alpha < 1$ delle r_i', si ha

$$| r_i'(\dot{X}'(t)) - r_i'(\dot{X}''(t)) | \leq L_i \sum_{i=1}^{n} | \dot{z}_i(t) |^\alpha \leq L \sum_{i=1}^{n} | \dot{z}_i(t) |^\alpha, \tag{15}$$

dove con L si è indicata la più grande delle costanti L_i. Dalla (14) tenuto conto della seconda disuguaglianza di (13), si ha

$$| \dot{z}_i(t) | < | c_i \dot{y}_i' + d_i \dot{y}_i'' | + BL \max_{(0,\, t)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} | \dot{z}_i(t) |^\alpha \right\}. \tag{16}$$

Supponiamo per un momento che le $| \dot{z}_i(t) |$ non restino limitate al crescere indefinito di t. Poichè $| \dot{z}_i(\tau) |$ è continua in $(0,\, t)$, qualunque sia t, sia t_i^* il punto di $(0,\, t)$ in cui $| \dot{z}_i(\tau) |$ assume il suo massimo u_i. Inoltre, avendo supposto la non limitazione delle $| \dot{z}_i(t) |$ in $(0,\, +\infty)$, sarà possibile trovare un valore di t abbastanza grande da risultare, essendo $\alpha < 1$,

$$n B L u_i^{\alpha - 1} < 1/2; \tag{17}$$

ancora risultando, per la loro stessa definizione, $| \dot{y}_i' |$ e $| \dot{y}_i'' |$ limitati, si potrà porre (per t abbastanza grande)

$$| c_i \dot{y}_i' + d_i \dot{y}_i'' | < K \qquad (i = 1,\, 2, \ldots,\, n), \tag{18}$$

con K costante positiva.

Fatto allora in (16) $t = t_i^*$, per la (18) avremo

$$u_i < K + BL \sum_{i=1}^{n} u_i^\alpha, \tag{19}$$

e sommando rispetto all'indice i,

$$\sum_{i=1}^{n} u_i < nK + nBL \sum_{i=1}^{n} u_i^\alpha,$$

ed anche

$$\sum_{i=1}^{n} u_i (1 - nBL u_i^{\alpha - 1}) < nK;$$

per la (17) si ha quindi infine

$$u_i < \sum_{i=1}^{n} u_i < 2nK, \tag{20}$$

e ancora

$$| \dot{z}_i(t) | < 2nK; \tag{21}$$

si è così ottenuto per $| \dot{z}_i(t) |$ *una limitazione indipendente da* t.

Resta facile far vedere ora che anche $| z_i(t) |$ è limitato in $(0, +\infty)$. Infatti essendo limitati in $(0, +\infty)$ $| y_i'(t) |$ e $| y_i''(t) |$ per la loro stessa definizione poniamo

$$| c_i y_i' + d_i y_i'' | < H \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

con H costante positiva. Grazie a (15) e (21) si ottiene dalla (12)

$$| z_i(t) | < H + 2nKL \int_0^t \frac{y_i''(t) y_i'(\tau) - y_i'(t) y_i''(\tau)}{W[y_i'(\tau), y_i''(\tau)]} d\tau,$$

e quindi per la prima disuguaglianza di (13)

$$| z_i(t) | < H + 2nAKL. \tag{22}$$

Questa limitazione prova il secondo Teorema che abbiamo enunciato in questo paragrafo e porta inoltre, come immediata conseguenza, la validità del 3° criterio.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. A. ANTOSIEWICZ, *On non linear differential equations of the second order with integrable forcing term*, « J. London Math. Soc. » 30, pag. 64 (1955).

[2] T. LEVI-CIVITA e AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, vol. 2, pt. 2, Zanichelli, Bologna (1927).

[3] G. SANSONE, *Lezioni di Analisi Matematica*, vol. 2, Cedam, Padova (1954).

[4] G. SESTINI, *Criterio di stabilità in un problema di Meccanica non lineare*, « Rivista Mat. Univ. Parma », 2, 303-314 (1951).

[5] G. SESTINI, *Criteri di Stabilità per il moto di un punto soggetto a forza elastica, a resistenza e ad una forza disturbatrice*, « Atti 4° Congresso Un. Mat. It. », vol. 2, 559-564 (1951).

[6] G. SESTINI, *Criterio di stabilità in un problema non lineare di Meccanica dei sistemi a più gradi di libertà*. « Rivista Mat. Univ. Parma », 5, 227-232 (1954).