Bollettino Unione Matematica Italiana

Giovanni Ricci

Prolungabilità e ultraconvergenza delle serie di potenze. Modulazione del margine delle lacune. II.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.4, p. 439–452.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_4_439_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Prolungabilità e ultraconvergenza delle serie di potenze. Modulazione del margine delle lacune. II.

Nota di GIOVANNI RICCI (a Milano)

Sunto. - *Si illustrano con osservazioni complementari i risultati di una Nota precedente con lo stesso titolo e si ricava il teorema di* FABRY-PÓLYA *dal secondo teorema di* OSTROWSKI. *Si costruisce una classe di serie ultraconvergenti. Si introduce la nozione di «scarto relativo» fra due successioni e si precisa un teorema di* G. BOURION *riguardante l'esistenza di serie di potenze ultraconvergenti lungo successioni assegnate.*

1. La serie di potenze

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \qquad (z = |z| e^{i\theta} = re^{i\theta})$$

abbia raggio di convergenza 1 e poniamo

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k.$$

In una recente Nota con lo stesso titolo (1) abbiamo richiamata la proprietà della «modulazione» del margine delle lacune delle

(1) Vedere G. RICCI, *Prolungabilità e ultraconvergenza...*, Rendiconti di matematica (5), **14**, 602-632 (1955). Vedere anche G. RICCI, *Sulle serie di potenze lacunari prolungabili e ultraconvergenti*, Rendiconti Acc. Naz. Lincei, (8), **18**, 27-31 (1955).

serie $f(z)$ ultraconvergenti; questa proprietà, segnalata in una forma più tenue da G. SZEGÖ, è naturale conseguenza del secondo teorema di A. OSTROWSKI, nella sua forma più completa (vedi Teor. (O_2^*), n. **3**); ma noi, nella Nota ricordata, abbiamo ottenuto la modulazione come conseguenza di un teorema di FABRY-PÓLYA.

Nella presente Nota si riassume schematicamente la Nota precedente, si aggiungono osservazioni complementari e si stabiliscono due semplici teoremi riguardanti la costruzione di serie $f(z)$ ultraconvergenti e l'insieme delle successioni $\{m_k\}$ lungo le quali si verifica l'ultraconvergenza: in questo modo si viene a precisare un teorema di G. BOURION.

Occorre riprendere alcune definizioni.

2. *Lacunarità* (H. O.). - Denotiamo con $\Lambda(f)$ l'*ordine di lacunarità* (H. O.) (secondo HADAMARD-OSTROWSKI) della serie $f(z)$, cioè l'estremo superiore dei numeri non negativi λ ai quali è possibile coordinare una successione $\{p_h, q_h\}$ di coppie di interi (p_h, q_h) con le seguenti proprietà:

i) $p_1 < q_1 \leqq p_2 < q_2 \leqq \dots$, $\liminf q_h/p_h = 1 + \lambda$;

ii) $\limsup |a_m|^{1/m} < 1$, $(p_h < m < q_h;\ h = 1, 2, 3, \dots)$ (per $m \to +\infty$).

Se $\lambda > 0$ si dice che $\{p_h, q_h\}$ è una *successione di lacune* (H. O.) di $f(z)$.

In ogni caso è $0 \leq \Lambda(f) \leq +\infty$: quando è $\Lambda(f) > 0$ si dice che la serie $f(z)$ è *lacunare* (H. O.).

Lacunarità (F. P.). - Conviene introdurre anche un altro tipo di lacunarità. Denotiamo con $\Lambda^*(f)$ l'*ordine di lacunarità* (F. P.) (secondo FABRY-PÓLYA) della serie $f(z)$, cioè l'estremo superiore dei numeri non negativi λ^* ai quali è possibile coordinare una successione $\{p_h^*, q_h^*\}$ di coppie di interi (p_h^*, q_h^*) con le seguenti proprietà:

i) $p_1^* < q_1^* \leqq p_2^* < q_2^* \leqq \dots$, $\liminf q_h^*/p_h^* = 1 + \lambda^*$;

ii) per $h = 1, 2, 3, \dots$ esiste w_h tale che

$$p_h^* \leqq w_h \leqq q_h^*, \qquad |a_{w_h}|^{1/w_h} \to 1;$$

iii) è possibile scegliere fra gli interi m dell'insieme di tratti $p_h^* \leq m \leq q_h^*$ $(h = 1, 2, 3, \dots)$, una successione parziale m_1, m_2, $m_3, \dots, m_k, \dots$ per la quale sia $k/m_k \to 0$ e detti m_0 tutti gli interi m non appartenenti a questa successione parziale si abbia

$$\limsup_{m_0 \to +\infty} |a_{m_0}|^{1/m_0} < 1 \ (^2).$$

Se $\lambda^* > 0$ si dice che $\{p_h^*, q_h^*\}$ è una *successione di lacune* F. P.) di $f(z)$.

In ogni caso è $0 \leqq \Lambda^*(f) \leqq +\infty$: quando $\Lambda^*(f) > 0$ si dice che la serie $f(z)$ è *lacunare* (F. P.).

Prolungabilità e ultraconvergenza. – Si dice che la serie $f(z)$ è *prolungabile* quando sulla circonferenza di convergenza esiste almeno un punto regolare (cioè almeno un arco di regolarità).

Detta $\{n_k\}$ una successione crescente di interi, una serie $f(z)$ prolungabile si dice *ultraconvergente lungo la successione* $f_{n_k}(z)$ quando ad ogni punto ζ regolare della circonferenza $|z| = 1$ si può coordinare un suo intorno completo $U(\zeta) \equiv (|z - \zeta| < \rho\ \zeta))$ nel quale la successione $f_{n_k}(z)$ converge uniformemente.

Se $f(z)$ è ultraconvergente lungo $f_{n_k}(z)$ è, a maggior ragione, ultraconvergente lungo una successione parziale di questa.

La scoperta brillante di A. OSTROWSKI consiste in questo che la convergenza uniforme di $f_{n_k}(z)$ nell'intorno $U(\zeta_0)$ di un punto regolare ζ_0 $(|\zeta_0| = 1)$ porta come conseguenza l'analogo comportamento nell'intorno $U(\zeta)$ di ogni altro punto regolare ζ, cioè porta l'ultraconvergenza.

Notazioni. – Denotiamo con

$\mathcal{S}$ l'insieme delle serie $f(z)$ prolungabili;

$\mathcal{S}_0$ l'insieme delle serie $f(z)$ (prolungabili e) ultraconvergenti $(\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S})$:

$\mathfrak{N}$ l'insieme delle serie $f(z)$ non prolungabili;

$\{p_h, q_h\}$ una successione di lacune (H. O.) di $f(z)$;

$\Lambda(f)$ l'ordine di lacunarità (H. O.) di $f(z)$;

$L(x)$ il numero degli interi $n \leqq x$ appartenenti alle lacune cioè $p_h < n < q_h$, $(h = 1, 2, 3, ...)$:

$\{p_h^*, q_h^*\}$ una successione di lacune (F. P.) di $f(z)$;

$\Lambda^*(f)$ l'ordine di lacunarità (F. P.) di $f(z)$.

3. I due teoremi di Ostrowski e il teorema di Fabry-Pólya. – Ricordiamo qui i due teoremi di A. OSTROWSKI: il primo (Teor. (O_1))

(2) In G. RICCI, loc. cit. in (1) « *Prolungabilità ...* » pp. 605-606, « *Sulle serie ...* » p. 28 la definizione di $\{p_h^*, q_h^*\}$ e, in conseguenza, quella di $\Lambda^*(f)$ sono lievemente diverse da quelle date qui $(\nu_h/p_h^* \to 0$ anzichè $k/m_k \to 0)$; tuttavia si vede facilmente che le due diverse definizioni di $\Lambda^*(f)$ conducono allo stesso valore.

e il secondo nelle sue due forme (Teor. (O_2), Teor. (O_2^*)), delle quali la seconda è più raffinata [3].

TEOREMA (O_1). – « Se $f \varepsilon \mathcal{S}$ e $\Lambda(f) > 0$ allora $f \varepsilon \mathcal{S}_0$. Detta $\{p_h, q_h\}$ una successione di lacune (H. O.), $f(z)$ è ultraconvergente lungo la successione $f_m(z)$ dove $m \to +\infty$ descrivendo la successione $p_h \leqq m < q_h$ $(h = 1, 2, 3, ...)$ ».

TEOREMA (O_2). – « Se $f_{m_k}(z)$ converge, per $k \to +\infty$, uniformemente in un intorno $|z - \zeta| < \rho$ di un punto ζ (necessariamente regolare) della circonferenza $|z| = 1$, allora $\Lambda(f) > 0$, $f \varepsilon \mathcal{S}_0$ ed esiste una successione $\{p_h, q_h\}$ di lacune (H. O.) contenente $\{m_k\}$, cioè $p_h \leqq m_k < q_h$ $(h = h(k)$ per $k = 1, 2, 3 ...)$ ».

TEOREMA (O_2^*). – « Nelle stesse ipotesi del Teorema (O_2), si può determinare un numero $\delta > 1$ tale che, se $m \to +\infty$ lungo la successione di interi $m_k/\delta < m < m_k\delta$ è $\limsup |a_m|^{1/m} < 1$ ».

È evidente che $(O_2^*) \Rightarrow (O_2)$, poichè è possibile ricavare dalla successione $\{m_k/\delta, m_k\delta\}$ di tratti (eventualmente in parti sovrapponentisi) una successione $\{p_h, q_h\}$ di lacune (H. O.) ed è $\Lambda(f) \geqq \delta^2 - 1$.

Nella Nota precedente (loc. cit. in [1]) abbiamo osservato che il teorema di FABRY–PÓLYA si può enunciare nella forma seguente:

Teorema (F. P.). – « Se $\Lambda^*(f) > 0$ allora $f \varepsilon \mathfrak{M}$ ».

4. Riassunto della Nota precedente. – Mediante la scelta di esempî appropriati abbiamo dimostrato la seguente proposizione:

TEOREMA I. – Prefissati arbitrariamente due numeri reali non negativi $0 \leqq \Lambda \leqq +\infty$, $0 \leqq \Lambda^* \leqq +\infty$ (eventualmente infiniti) esistono serie di potenze $f(z)$ per le quali è simultaneamente $\Lambda(f) = \Lambda$ e $\Lambda^*(f) = \Lambda^*$.

Senza fare uso del Teor. (O_1), ma seguendo il ragionamento diretto classico, abbiamo dimostrato il seguente

[3] Per i Teoremi (O_1) e (O_2) vedere per es. A. OSTROWSKI, *On Representation of analytical Functions by power Series*, Journ. London Math. Soc. **1**, 251-263 (1926), pp. 253-255; per i Teoremi (O_2) e (O_2^*) vedere A. OSTROWSKI, *Über eine Eigenschaft gewisser Potenzreihen mit unendlich vielen verschwindenden Koeffizienten*, Sitzungsberichte Akad. d. Wiss. Berlin 1921, 557-565; *Über Potenzreihen, die überkonvergente Abschnittsfolgen besitzen*, Sitzungsberichte Akad. d. Wiss. Berlin 1923, 185-192. Vedere anche P. DIENES, *The Taylor Series*, Oxford 1931, pp. 358-372; F. LÖSCH, *Lückensatz und Überkonvergenz...*, Math. Zeitsch. **36**, (1933), pp. 202-262 (vedi pp. 241-247); G. BOURION, *Recherches sur l'ultraconvergence*, Annales École Norm. Supér. (3), **50**, (1933), 245-318 (vedi pp. 257-276).

TEOREMA II. - Sia $\{\rho_h\}$ una successione crescente di interi ρ_h, tale che $\liminf \rho_{h+1}/\rho_h > 1$ (4).

La serie di potenze

$$f(z) = \sum_{h=1}^{\infty} P_h(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n, \quad \left(P_h(z) = \frac{\{z(1+z)\}^{\rho_h}}{C_h}, \; C_h = \binom{\rho_h}{[\rho_h/2]}\right),$$

è ultraconvergente lungo la successione degli interi m che appartengono ai tratti

$$\frac{3}{2}\rho_h(1+\delta) < m < \frac{3}{2}\rho_{h+1}(1-\delta), \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots)$$

dove $\delta > 0$ è scelto in guisa da avere $(1+\delta)/(1-\delta) < \liminf \rho_{h+1}/\rho_h$.

Abbiamo dimostrato, servendoci dei due teoremi (O_2) e (F. P.) e *senza fare uso del teorema* (O_2^*), il seguente:

TEOREMA IV. - Se $f(z) \varepsilon \mathcal{S}_0$ e $\{p_h, q_h\}$ è una successione di lacune (H. O.) allora, esiste $\delta > 0$ tale che $\{(1-\delta)p_h, (1+\delta)q_h\}$ è ancora una successione di lacune (H. O.) (5).

Questo teorema pone in evidenza la modulazione dei margini delle lacune (H. O.); d'altronde questa proprietà è immediata conseguenza del Teor. (O_2^*), poichè $(O_2^*) \Rightarrow$ (IV).

La dimostrazione che abbiamo esposta del Teor. IV stabilisce che (O_2) + (F. P.) $\Rightarrow$ (O_2^*). Si può vedere con facilità che $(O_2^*) \Rightarrow$ (F. P.), cioè:

TEOREMA. - *Il Teorema* (F. P.) (*di* FABRY-PÓLYA) *è una conseguenza del secondo teorema di* OSTROWSKI *nella forma Teorema* (O_2^*).

DIMOSTRAZIONE. - Sia $\Lambda^*(f) > 0$, $\{p_h^*, q_h^*\}$ la successione di lacune (F. P.), $\{m_k\}$ la successione degli interi m_k distinti dai n_h. Si consideri la funzione intera $g(z)$ (ausiliaria classica) che si annulla nei punti m_k e la serie di potenze ausiliaria $F(z) = \Sigma\, a_n g(n) z^n$.

(4) In loc. cit. (1) p. 610 si trova l'ipotesi $\rho_{h+1}/\rho_h \to \lambda > 1$, ma, senza sostanziali cambiamenti nella dimostrazione, si può sostituire a questa ipotesi quella più ampia $\liminf \rho_{h+1}/\rho_h = \lambda > 1$.

(5) Prendiamo l'occasione per segnalare qui una nostra omissione: nelle due note citate in (1) «*Prolungabilità* ...» a pag. 624 e «*Sulle serie* ...» a pag. 30 è ricordato incompletamente il risultato di G. SZEGÖ, «*Tschebyscheffsche Polynome* ...», Math. Ann. 87, 90-111 (1922) (vedi in particolare pp. 109-111): infatti in G. SZEGÖ si trova dimostrata la possibilità di passare dalla successione di lacune (H. O.) $\{p_h, q_h\}$ a una qualunque più ampia $\{p_h - k, q_h + k\}$ (k indipendente da h), ampliata sia a sinistra che a destra, e quindi con $\Psi_1(h) = k$, $\Psi_2(h) = k$.

Sia $f(z)$ prolungabile; tale risulta anche $F(z)$, che possiede una successione di lacune (H. O.) costituita dal tratto maggiore dei due (p_h^*, w_h), (w_h, q_h^*) $(h = 1, 2, \ldots)$; dunque $F(z)$ è ultraconvergente lungo la successione $F_{w_h'}(z)$ con $w_h' = w_h \pm 1$ (uno dei due per ogni h). Poichè $|a_{w_h}|^{1/w_h} \to 1$ questo contraddice il teorema (O_2^*); pertanto $f(z)$ non è prolungabile.

Dal Teor. (O_2^*) si ricava facilmente che se $f \varepsilon \mathfrak{F}_0$ e $\Lambda(f)$ è finito e $\{p_k, q_h\}$ è una successione di lacune (H. O.), allora è anche $\limsup q_h/p_h < 1 + \Lambda(f)$ (mai $= 1 + \Lambda(f)$). Questa proposizione è stata da noi ricavata dal Teor. IV.

Seguono dal Teor. (O_2^*) (o anche dal Teor. IV) le due proprietà segnalate nella Nota precedente:

Se $\Lambda(f)$ è finito è $\limsup L(x)/x < 1$.

Se $\Lambda(f) = +\infty$ è $\liminf L(x)/x < 1$ (mentre potrebbe essere anche $\limsup L(x)/x = 1$).

5. La successione $\{n_k\}'_\delta$. Scarto relativo fra due successioni. – Fissata una successione crescente $\{n_k\}$ di interi n_k e un numero reale $\delta > 1$, denotiamo con $\{n_k\}_\delta$ la successione crescente degli interi u che verificano una (almeno) delle infinite disuguaglianze

$$n_k/\delta < u < n_k\delta, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Denotiamo con $\{n_k\}'_\delta$ la successione crescente complementare di $\{n_k\}_\delta$, cioè quella costituita da tutti e soli gli interi non appartenenti a $\{n_k\}_\delta$. Può avvenire che $\{n_k\}'_\delta$ sia finita o vuota.

Se $1 < \eta < \delta$ è $\{n_k\}_\eta \subset \{n_k\}_\delta$, $\{n_k\}'_\delta \supset \{n_k\}'_\eta$.

Se $v \varepsilon \{n_k\}'_\delta$ esiste t tale che $n_t < v < n_{t+1}$; per il fatto che v non appartiene a $\{n_k\}_\delta$ abbiamo

$$n_t\delta < v < n_{t+1}/\delta, \qquad n_t < v/\delta < v < v\delta < n_{t+1}.$$

Questa osservazione ci dice che sussiste la relazione reciproca *Da* $\{m_h\} \subset \{n_k\}'_\delta$ *segue* $\{n_k\} \subset \{m_h\}'_\delta$.

Se $\{m_h\}$ e $\{n_k\}_\delta$ hanno al più un numero finito di elementi in comune, lo stesso accade per $\{n_k\}$ e $\{m_h\}_\delta$.

Diciamo *scarto relativo* fra due successioni $\{n_k\}$, $\{m_h\}$, e si denoterà con $\Lambda\{n_k, m_h\}$, l'estremo superiore dei numeri reali non negativi $\delta - 1$ tali che $\{n_k\}_\delta$ e $\{m_h\}$ hanno al più un numero finito di elementi in comune.

È evidente che $\Lambda\{n_k, m_h\} \geqq 0$, $\Lambda\{n_k, m_h\} = \Lambda\{m_h, n_k\}$.

Se $\{m_h\}$ e $\{n_k\}$ hanno infiniti elementi in comune è $\Lambda\{m_h, n_k\} = 0$. Posto $\mu(k) = \operatorname{Min}_h |n_k - m_h|$, se $\mu(k) = o(n_k)$, allora $\Lambda\{m_h, n_k\} = 0$; lo stesso si dica se $\liminf \mu(k)/n_k = 0$.

Il Teor. (O_2^*) si può enunciare nel modo seguente:

Sia f(z) *ultraconvergente lungo* $f_{m_h}(z)$ *e* $\{w_s\}$ *una successione tale che* $|a_{w_s}|^{1/w_s} \to 1$, *allora* $\Lambda\{m_h, w_s\} > 0$.

Il Teor. (F. P.) si può enunciare nel modo seguente:

Esistano un numero $\delta > 1$ *e due successioni* $\{m_h\}$ *e* $\{w_s\}$ *con le seguenti proprietà:*

$$1) \quad |a_{w_s}|^{1/w_s} \to 1; \qquad 2) \quad \limsup |a_m|^{1/m} < 1$$

quando $m \to +\infty$ *lungo la successione* $\{m_h\}_\delta$, *prescindendo al più da una successione parziale* $\{m^*\}$ *contenuta in* $\{m_h\}_\delta$, *e avente densità nulla:*

$$3) \quad \Lambda\{w_s, m_h\} = 0.$$

Allora f(z) *non è prolungabile.*

Quando $\Lambda^*(f) > 0$ esistono due successioni come $\{w_s\}$ e $\{m_h\}$ e un numero $\delta > 1$ pei quali si verificano le proprietà 1), 2), 3); e viceversa.

6. Una classe di serie ultraconvergenti. – Ci proponiamo di assegnare una legge che consente di costruire una ampia classe di serie ultraconvergenti.

Teorema (A). – *Sia* $\varphi_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_{n,m} z^m$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ *una successione di funzioni ciascuna delle quali possieda le seguenti proprietà:*

$$(6.1) \qquad |b_{n,n}| = 1, \qquad |b_{n,m}| \leq \exp(-\varepsilon\, |n-m|^\alpha / n^{\alpha-1})$$
$$(\varepsilon > 0,\ \alpha \geq 1 \text{ indipendenti da m e n}).$$

Sia $\{n_k\}$ *una successione crescente di interi e* $\{c_{n_k}\}$ *una successione di numeri complessi e poniamo*

$$(6.2) \qquad f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n_k} \varphi_{n_k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n .$$

Se

$$(6.3) \qquad \limsup_{k \to +\infty} |c_{n_k}|^{1/n_k} = 1$$

e se la serie di funzioni

$$(6.4) \qquad \Phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n_k} \{\varphi_{n_k}(1-z) - \varphi_{n_k}(z)\}$$

converge uniformemente in un completo intorno del punto $z = 1$, *allora la serie* $f(z) = \sum a_n z^n$ *ha raggio di convergenza maggiore di* 1 *oppure ha raggio di convergenza* 1 *e, in questo caso, è prolungabile* *e ultraconvergente lungo ogni successione* $\{n_k\}'_\delta$ ($\delta > 1$, *quando esista una effettiva successione illimitata per qualche* $\delta > 1$).

DIMOSTRAZIONE. – La dimostrazione si svolge con le seguenti semplici osservazioni.

1°) *Le serie* $\varphi_n(z)$ *convergono tutte per* $|z| < \exp\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$, *indipendente da* n). Infatti, per $m > n$ è

$$(6.5) \qquad |b_{n,m}|^{1/m} \leqq \exp\left(-\varepsilon\frac{|n-m|^\alpha}{mn^{\alpha-1}}\right) = \exp\left\{-\varepsilon\left(1-\frac{n}{m}\right)^\alpha\left(\frac{m}{n}\right)^{\alpha-1}\right\}$$

e si vede che:

per $\alpha > 1$, $(m/n)^{\alpha-1} \rightarrow +\infty$, $|b_{n,m}|^{1/m} \rightarrow 0$, $\varphi_n(z)$ è intera;

per $\alpha = 1$, $(m/n)^{\alpha-1} = 1$, $\limsup |b_{n,m}|^{1/m} \leqq \exp(-\varepsilon)$

da cui l'asserto.

2°) *Per ogni* $0 < \eta \leqq \varepsilon$, *nel cerchio* $|z| \leqq \exp(-\eta)$ *è*

$$(6.6) \qquad |\varphi_n(z)| \leqq H\exp(-\gamma n), \quad (H = H(\varepsilon, \alpha; \eta)), \quad \gamma = \gamma(\varepsilon, \alpha; \eta) > 0).$$

Infatti

$$|\varphi_n(z)| \leqq \sum_{m=0}^{\infty} |b_{n,m}|\,|z|^m$$

$$\leqq \sum_{m=0}^{\infty} \exp(-\varepsilon|n-m|^\alpha/n^{\alpha-1} - \eta m)$$

$$(6.7) \qquad = \sum_{m=0}^{n} \exp(\ldots) + \sum_{m=n+1}^{\infty} \exp(\ldots) = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Veniamo a maggiorare separatamente Σ_1 e Σ_2.

$$\Sigma_1 = \sum_{m=0}^{n} \exp\left(-\left\{\varepsilon\left(1-\frac{m}{n}\right)^\alpha + \eta\frac{m}{n}\right\}n\right).$$

L'espressione $\psi(t) = \varepsilon(1-t)^\alpha + \eta t$ $(0 < \eta \leqq \varepsilon, \alpha \geqq 1)$ assume il suo valore minimo:

quando $\alpha = 1$ per $t = 1$ e il minimo è $\psi_0 = \eta = \gamma_1(\varepsilon, 1; \eta) > 0$

quando $\alpha > 1$ per $t = 1 - \{\eta/(\alpha\varepsilon)\}^{1/(\alpha-1)}$ e il minimo è

$$\psi_0 = \varepsilon\left(\frac{\eta}{\alpha\varepsilon}\right)^{\alpha/(\alpha-1)} + \eta\left(1-\frac{\eta}{\alpha\varepsilon}\right)^{1/(\alpha-1)} = \gamma_1(\varepsilon, \alpha; \eta) = \gamma_1 > 0.$$

In ogni caso è

$$(6.8) \qquad \Sigma_1 \leqq \sum_{m\leqq n} \exp(-\gamma_1 n) = (n+1)\exp(-\gamma_1 n)$$

$$(6.9) \qquad \Sigma_2 < \sum_{m=n+1}^{\infty} \exp(-\eta m) < H_1(\eta)\cdot\exp(-\eta n)$$

$$H_1(\eta) = 1/(1-\exp(-\eta)).$$

Dalla (6.7), in forza delle (6.8) e (6.9), otteniamo:

$$|\varphi_n(z)| < (n+1)\cdot\exp(-\gamma_1 n) + H_1(\eta)\cdot\exp(-\eta n).$$

Scegliendo $2\gamma = \min(\gamma_1, \eta)$ e $H(\varepsilon, \alpha; \eta)$ abbastanza grande ne segue la (6.6).

3°) *Per ogni* $\eta > 0$ *la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} c_{n_k}\varphi_{n_k}(z)$, $(n_1 < n_2 < \ldots)$, *converge uniformemente nel cerchio* $|z| \leqq \exp(-\eta)$.

Scegliamo $0 < \sigma < \gamma/2$ $(\gamma = \gamma(\varepsilon, \alpha; \eta)$ del punto 2°); l'ipotesi (6.3) ci dà

(6.10) $$|c_n| \leqq C_\sigma \exp(\sigma n), \quad (C_\sigma \text{ indipendente da } n)$$

e abbiamo, tenuto conto anche della (6.6):

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n_k}|\,|\varphi_{n_k}(z)| \leqq C_\sigma\cdot H(\varepsilon, \alpha; \eta)\sum_{k=1}^{\infty}\exp\{(\sigma-\gamma)n_k\}$$
$$\leqq K(\varepsilon, \alpha; \eta)\sum_{k=1}^{\infty}\exp(-\gamma n_k/2).$$

Questa ultima serie è a termini indipendenti da z ed è convergente; per il criterio del confronto ne segue l'asserto.

4°) *La serie* $f(z) = \sum a_n z^n$ *converge per* $|z| < 1$. Infatti il teorema della serie doppia di WEIERSTRASS, in conseguenza del punto 3°, ci assicura che, fissato $R < 1$, $f(z)$ è il limite di una successione di funzioni analitiche uniformemente convergente in $|z| \leqq R(<1)$.

Osserviamo che l'espressione di a_n è

(6.11) $$a_n = \sum_{s=0}^{\infty} c_s b_{s,n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ed è una serie convergente per ogni n; qui abbiamo posto $c_s = c_{n_k}$ per $s = n_k$ e $c_s = 0$ per $s \neq n_k$ e conserveremo questa convenzione per il seguito.

5°) $f(z)$ *è regolare in* $z = 1$; *quindi* $f(z)$ *è prolungabile.* Infatti $f(z)$ è regolare in $z = 0$ e

$$f(1-z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n_k}\varphi_{n_k}(1-z)$$

è regolare in $z = 1$; ma è per la (6.4)

$$f(1-z) = f(z) + \Phi(z)$$

e, per l'ipotesi sulla serie che in (6.4) definisce $\Phi(z)$, questa funzione è regolare in $z = 1$: ne segue che anche $f(z)$ è regolare in $z = 1$.

6°) Supponiamo che esista un $\delta_0 > 1$ tale che $\{n_k\}'_{\delta_0}$ contenga infiniti elementi e assumiamo $1 < \delta < \delta_0$.

Per $m \varepsilon \{n_k\}'_\delta$, $m \to +\infty$ *è* $\limsup |a_m|^{1/m} < 1$.

Essendo $m \varepsilon \{n_k\}'_\delta$ esiste $v = v(m)$ tale che

$$\delta n_v < m < n_{v+1}/\delta.$$

Poichè $c_n = 0$ (almeno) per $n_v < n < n_{v+1}$, risulta

$$\begin{aligned} a_m = \sum_{s=0}^{\infty} c_s b_{s,m} &= \sum_{s=0}^{n_v} c_s b_{s,m} + \sum_{s=n_{v+1}}^{\infty} c_s b_{s,m} \\ \text{(6.12)} \qquad &= \Sigma_1 + \Sigma_2 . \end{aligned}$$

Veniamo a maggiorare Σ_1 e Σ_2 tenendo conto della (6.10) e della seconda in (6.1).

$$|\Sigma_1| \leqq \sum_{s=0}^{n_v} |c_s| \cdot |b_{s,m}| \leqq C_\sigma \sum_{s=0}^{n_v} \exp \{\sigma s - \varepsilon (m-s)^\alpha / m^{\alpha-1}\}.$$

Osserviamo che $s \leqq n_v < m/\delta$ e quindi è

$$\sigma s - \varepsilon \frac{(m-s)^\alpha}{m^{\alpha-1}} = m \left\{ \sigma \frac{s}{m} - \varepsilon \left(1 - \frac{s}{m}\right)^\alpha \right\} \leqq -m \left\{ \varepsilon \left(1 - \frac{1}{\delta}\right)^\alpha - \sigma\delta \right\};$$

assumendo $\sigma < \varepsilon(\delta - 1)^\alpha / (2\delta^{\alpha+1}) = \varepsilon_1$ risulta

$$\sigma s - \varepsilon (m-s)^\alpha / m^{\alpha-1} < -\varepsilon_1 m$$

e quindi

$$\begin{aligned} |\Sigma_1| &\leqq C_\sigma \sum_{s=0}^{n_v} \exp(-\varepsilon_1 m) = C_\sigma n_v \exp(-\varepsilon_1 m) \\ \text{(6.13)} \qquad &\leqq (C_\sigma/\delta)\, m \exp(-\varepsilon_1 m). \end{aligned}$$

$$|\Sigma_2| \leqq \sum_{s=n_{v+1}}^{\infty} |c_s| \cdot |b_{s,m}| \leqq C_\sigma \sum_{s=n_{v+1}}^{\infty} \exp \left\{ \sigma s - \varepsilon \frac{(s-m)^\alpha}{m^{\alpha-1}} \right\}.$$

Osserviamo che $s \geqq n_{v+1} > \delta m$ e quindi nell'esponente

$$\sigma s - \varepsilon \frac{(s-m)^\alpha}{m^{\alpha-1}} = s \left\{ \sigma - \varepsilon \frac{(1-m/s)^\alpha}{(m/s)^{\alpha-1}} \right\}$$

il massimo, al variare della sola s, dell'espressione entro parentesi $\{\ \}$, si ottiene quando m/s è massimo e risulta $m/s < 1/\delta$; dunque

$$\sigma s - \varepsilon \frac{(s-m)^\alpha}{m^{\alpha-1}} < s \left\{ \sigma - \varepsilon \frac{(\delta-1)^\alpha}{\delta} \right\}$$

e assumendo $\sigma < \varepsilon(\delta - 1)^{\alpha}/(2\delta) = \varepsilon_2$ risulta

$$| \Sigma_2 | \leqq C_\sigma \sum_{s=n_v+1}^{\infty} \exp(-\varepsilon_2 s) = C_\sigma \exp(-\varepsilon_2 n_{v+1}) \cdot B_2(\varepsilon, \delta)$$

$$\leqq C_\sigma \cdot B_2(\varepsilon, \delta) \exp(-\varepsilon_2 m/\delta). \tag{6.14}$$

Osserviamo che $\varepsilon_1 < \varepsilon_2/\delta$ e quindi, per $\sigma < \varepsilon_1$, dalla (6.12) in forza delle (6.13) e (6.14) otteniamo

$$| a_m | \leqq C_\sigma \{ m/\delta + B_2(\varepsilon, \delta) \} \exp(-\varepsilon_1 m)$$

e quindi $\limsup | a_m |^{1/m} \leqq \exp(-\varepsilon_1) < 1$, per $m \varepsilon \{ n_k \}'_\delta$, $m \to +\infty$.

7°) Per la proprietà segnalata nel punto 6° e in forza del Teor. (O_1) la serie $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ è ultraconvergente lungo la successione $f_m(z)$.

Il teorema è completamente dimostrato.

7. Ultraconvergenza lungo successioni assegnate. – Assegnata una successione $\{ m_h \}$, esistono serie di potenze $f(z)$ che sono ultraconvergenti lungo $f_{m_h}(z)$? G. Bourion [6] ha dimostrato in proposito un teorema che, mediante la nozione di scarto relativo, può essere enunciato nel modo seguente

« Se lo scarto relativo $\Lambda \{ n_k, m_h \}$ fra le due successioni $\{ n_k \}$ e $\{ m_h \}$ è positivo, esistono serie di potenze $f(z) = \sum a_n z^n$ che sono ultraconvergenti lungo $\{ m_h \}$ e non lo sono lungo $\{ n_k \}$ ».

Noi verremo a precisare questo teorema un poco di più e dimostreremo il

Teorema (B) (di G. Bourion). – *Se* $\{ \mathrm{m_h} \}$ *è una successione crescente di interi tale che esistano successioni* $\{ \mathrm{n_k} \}$ *aventi con essa scarto relativo positivo* [7], *cioè* $\Lambda \{ \mathrm{n_k}, \mathrm{m_h} \} > 0$, *allora esistono serie di potenze* $\mathrm{f(z)} = \sum \mathrm{a_n z^n}$ *aventi raggio di convergenza* 1 *e ultraconvergenti lungo tutte le successioni* $\{ \mathrm{m_h} \}_\delta$, *con* $\delta < \Lambda \{ \mathrm{n_k}, \mathrm{m_h} \}$.

A questo teorema possiamo dare una forma più precisa che, denotando con $\{ n_k \}$ la successione $\{ m_k \}'_{\delta_0}$, è la seguente:

Teorema (C). – *Assegnata una qualunque successione* $\{ \mathrm{n_k} \}$, *esistono serie di potenze* $\mathrm{f(z)} = \sum_0^\infty \mathrm{a_n z^n}$ *che hanno raggio di conver-*

[6] Vedi G. Bourion, loc. cit. in [3] pp. 274-276.

[7] Questo significa che per un $\delta_0 > 1$ la successione $\{ m_h \}'_{\delta_0}$ non è né vuota, né finita.

genza 1 *e che sono ultraconvergenti lungo tutte e sole le successioni* $\{m_h\}$ *tali che* $\Lambda\{m_h, n_k\} > 0$.

DIMOSTRAZIONE. - Se per ogni $\delta > 0$ l'insieme $\{n_k\}'_\delta$ contiene al più un numero finito di interi, l'affermazione del teorema è ovvia poichè $\Lambda\{m_h, n_k\} = 0$ per ogni $\{m_k\}$ e d'altronde la serie $\sum_k z^{n_k}$ non è ultraconvergente lungo alcuna successione, in forza del Teor. (O_2) che richiede la struttura lacunare.

Esista un $\delta_0 > 0$ tale che $\{n_k\}'_{\delta_0}$ contenga infiniti elementi: ci proponiamo di costruire $f(z)$ e a questo scopo applicheremo il Teorema (A) (n. 6).

1) *Scelta della successione* $\{\varphi_n(z)\}$. - Ad ogni n_k sostituiamo il minimo multiplo di 3 non inferiore a n_k e conserviamo, nella successione così ottenuta, una sola volta i multipli di 3 eventualmente ripetuti: si ottiene una nuova successione crescente $\{n_l'\}$.

Per ogni $\{m_h\}$ è $\Lambda\{m_h, n_k\} = \Lambda\{m_h, n_l'\}$; infatti, per ogni $\eta < \delta$ è $\{n_k\}_\eta$ definitivamente contenuta in $\{n_l'\}_\delta$ ed è $\{n_l'\}_\eta$ definitivamente contenuta in $\{n_k\}_\delta$.

Continuiamo a denotare con $\{n_k\}$ la successione $\{n_l'\}$ e poniamo $n_k = 3r_k$. Si consideri il polinomio (di grado $4r$)

$$\varphi_n(z) = P_{4r}(z) = \{z(1-z)\}^{2r} : \binom{2r}{r} \qquad (n = 3r) \tag{7.1}$$

$$= \sum_{m=2r}^{4r} b_{n,m} z^m$$

i cui coefficienti si susseguono coi segni alternati:

$$\begin{cases} b_{n,m} = (-1)^m \dbinom{2r}{m-2r} : \dbinom{2r}{r}, \qquad b_{n,n} = (-1)^r \\ (n = 3r;\ 2r \leqq m \leqq 4r). \end{cases} \tag{7.2}$$

2°) *L'ipotesi* (6.1) *è verificata con* $\alpha = 2$.

Poniamo $u = |n - m| = |3r - m|$, allora è $u \leqq r$ e

$$|b_{n,m}| = \binom{2r}{r-u} : \binom{2r}{r} = \frac{r!\,r!}{(r-u)!\,(r+u)!} \tag{7.3}$$

$$= \frac{r(r-1)\ldots(r-u+1)}{(r+u)(r+u-1)\ldots(r+1)} < \left(\frac{r}{r+u}\right)^u.$$

Sia $0 < \gamma < 1/2$ e $\gamma r < u \leqq r$, allora (poichè $m/u \geqq 2r/r = 2$)

$$|b_{n,m}| \leqq (1+\gamma)^{-u},$$

$$\log|b_{n,m}| \leqq -\log(1+\gamma)\cdot u \leqq -\gamma u/2$$

$$= -\frac{\gamma}{2}\frac{m}{u}\cdot\frac{u^2}{m} \leqq -\gamma\cdot\frac{u^2}{4r} = -\frac{3\gamma}{4}\cdot\frac{|n-m|^2}{n}. \tag{7.4}$$

Consideriamo adesso i piccoli valori di u, cioè $0 < u \leqq \gamma r$ e poniamo $u = \tau r \, (0 < \tau \leqq \gamma)$: la formula di STIRLING

$$\log(r\,!) = r \log r - r + \frac{1}{2} \log r + \log \sqrt{2\pi} + \sigma_r, \quad (\sigma_r \backsim 1/(12r))$$

applicata all'espressione in (7.3) ci dà

$$\log | b_{n,m} | = -\frac{u^2}{r} - \frac{u^4}{6r^3} - \dots - \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{u^2}{r^2}\right) + \sigma_{r,u},$$

con $\sigma_{r,u} = -\tau^2/\{6r(1-\tau^2)\} + \theta/(540r^3) < 0 \quad (|\theta| < 1, \; 1/r \leqq \tau \leqq \gamma)$, per r abbastanza grande; si deduce che per r abbastanza grande (cioè per n abbastanza grande) è

$$\log | b_{n,m} | < -\frac{u^2}{r} - \frac{1}{2} \log (1 - \tau^2).$$

Essendo $0 < \tau \leqq \gamma \leqq 1/2$ si ottiene immediatamente la maggiorazione

$$-\frac{1}{2} \log (1 - \tau^2) < \frac{7}{12} \tau^2 = \frac{7u^2}{12r^2},$$

e pertanto

$$\log | b_{n,m} | < -\frac{u^2}{r} \left\{ 1 - \frac{7}{12r} \right\} < -\frac{u^2}{2r} = -\frac{3u^2}{2n}$$

$$| b_{n,m} | < \exp\left(-\frac{|n-m|^2}{n}\right). \tag{7.5}$$

Scegliendo $\varepsilon \leqq 3\gamma/4$ e abbastanza piccolo, possiamo, in forza di (7.4) e (7.5), rendere valida la (6.1) con $\alpha = 2$ e $r > 0$.

3°) *Scelta dei coefficienti* c_n. – La funzione $f(z)$ risulterà definita non appena avremo scelta la successione $\{c_n\}$; poichè le funzioni $\varphi_n(z)$ sono i polinomî (7.1), l'espressione (6.11) del coefficiente a_n è la somma finita

$$a_m = \sum_{\substack{n = n_k \\ 3m/4 \leqq n \leqq 3m/2}} c_n b_{n,m}$$

nella quale $n = 3r$ appartiene a n_k e, poichè il grado m dei singoli termini di $\varphi_n(z) = P_{4r}(z)$ verifica la limitazione $2r \leqq m \leqq 4r$ (vedi (7.1)) cioè $2n/3 \leqq m \leqq 4n/3$, la somma che dà a_m è estesa all'indice n che percorre, in $\{n_k\}$, l'intervallo $3m/4 \leqq n \leqq 3m/2$. Dalla (7.2) si ricava che $b_{n,m}$ ha il segno $(-1)^m$, indipendente da n, e quindi, assumendo $c_{n_k} = 1$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$, abbiamo $a_m = \sum b_{n,m}$, $|a_m| = \sum |b_{n,m}|$. Pei valori $m = n_k$, nella somma figura il termine $_{n_k}$ che ha modulo 1 e si ricava:

$$|a_{n_k}| \geqq |b_{n_k, n_k}| \, 1. \qquad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

La serie $f(z)$ assegnata da (6.2) ha raggio di convergenza 1.

4°) Per la scelta di $\varphi_n(z)$ fissata in (7.1) è $\varphi_n(1-z) = \varphi_n(z)$ e pertanto *la funzione* $\Phi(z)$ *definita in* (6.4) *è identicamente nulla.*

Tutte le ipotesi del Teorema (A) sono verificate e quindi la funzione

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n_k} \varphi_{n_k}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n_k} P_{4r_k}(z), \qquad (n_k = 3r_k)$$
$$= \sum a_n z^n,$$

ha lo sviluppo del TAYLOR ultraconvergente lungo ogni successione $\{n_k\}'_\delta$, per ogni δ scelto nell'intervallo $1 < \delta < \delta_0$.

5°) Ci rimane da dimostrare che l'ultraconvergenza si ha soltanto lungo successioni contenute definitivamente in qualche $\{n_k\}'_\delta$, cioè che l'ultraconvergenza non si presenta lungo $\{m_h\}$ se $\Lambda\{n_k, m_h\} = 0$.

Sia $\Lambda\{n_k, m_h\} = 0$ e $f(z)$ ultraconvergente lungo $\{m_h\}$; allora, in forza del Teor. $(O_2{}^*)$ (n. 3) è possibile determinare tre numeri $\eta > 1$, $\rho < 1$, e h_0 tali che si abbia

$$|a_v|^{1/v} < \rho, \quad \text{per} \quad m_h/\eta < v < m_h\eta \quad (h = h_0, h_0+1, \dots).$$

Ma l'ipotesi $\Lambda\{n_k, m_h\} = 0$ significa che esiste una successione $\{n'\}$ parziale di $\{n_k\}$ e una successione $\{m'\}$ parziale di $\{m_h\}$ tali che $m'/\eta < n' < m'\eta$ e d'altronde per il modo come abbiamo costruita $f(z)$ è $|a_{n'}| \geq 1$ (vedi (7.6)) e non può essere verificata la disuguaglianza $|a_{n'}|^{1/n'} < \rho$ per infiniti n'. Si giunge all'assurdo e il Teor. (C) risulta completamente dimostrato.