Bollettino Unione Matematica Italiana

Giuseppe Palamà

Integrali generali delle equazioni differenziali cui soddisfano polinomi che generalizzano altri classici ed i loro associati.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.2, p. 201–207.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_2_201_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

Integrali generali delle equazioni differenziali cui soddisfano polinomi che generalizzano altri classici ed i loro associati.

Nota di GIUSEPPE PALAMÀ (a Lecce)

Sunto. *È contenuto nella breve introduzione che segue.*

In questo Lavoro si danno le derivate e le equazioni differenziali di due polinomi che generalizzano rispettivamente i polinomi di LAGUERRE ed i loro associati, ed i polinomi d'HERMITE ed i loro associati. Delle dette equazioni differenziali si danno inoltre gli integrali generali.

§ 1. - Polinomi che generalizzano i polinomi d'Hermite ed i loro associati.

1. In questo Lavoro si generalizza la formula stabilita recentemente da L. TOSCANO [1]

$$(1_1) \qquad G'_{n-1}(x) = H_n(x) - G_n(x),$$

[1] *Polinomi associati a polinomi classici*, « Riv. Mat. di Parma », 4, (1953), pp. 387-402.

in cui al solito si indica con $H_n(x)$ e $G_n(x)$ rispettivamente il polinomio d'HERMITE (per il quale si ha $H_n'(x) = nH_{n-1}(x)$) ed il suo associato. In questa Nota poi per lo più si scrive $F'(x)$ invece di $dF(x)/dx$.

In un Lavoro precedente [2] abbiamo studiato i polinomi $H^{n,p}(x)$, che generalizzano i polinomi d'HERMITE ed i loro associati, cui si riducono, rispettivamente, per $n = 0$, $n = 1$, e per i quali vale ad esempio la seguente formula che ci occorrerà in seguito

$$H_{n+p}(x) = H^{n,p}(x)H_n(x) - nH^{n+1,p-1}(x)H_{n-1}(x). \tag{2_1}$$

2. La

$$\frac{d}{dx} H^{n,p-1}(x) = H^{n-1,p}(x) - H^{n,p}(x), \tag{1_2}$$

che generalizza la (1_1) (cui si riduce per $n = 1$) e la

$$\frac{d^r}{dx^r} H^{n,p}(x) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} H^{n-r+i,p+r}(x),$$

che generalizza alla sua volta la (1_2), si dimostrano agevolmente con il metodo d'induzione completa.

3. Si verifica poi subito che all'equazione differenziale

$$z'' + xz' + (n+1)z = 2nH_{n-1}(x), \tag{1_3}$$

e a ciascuna delle due seguenti altre

$$u'' - xu' + (p+3)u = 4H^{3,p-1}(x), \tag{2_3}$$

$$\begin{aligned} x^2u'' + x(x^2-2)u' + [(p+1)x^2+2]u &= 2p[xH_p(x) + H_{p-1}'x)] = \\ &= 2p[(p+1)H_{p-1}(x) + H_{p+1}(x)] \end{aligned} \tag{3_3}$$

soddisfano rispettivamente $G_{n-1}(x)$ [3] ed $H^{2,p-1}(x)$.

4. L'equazione differenziale invece cui soddisfa

$$u = H^{n+1,p-1}(x),$$

si ha a mezzo della sostituzione ad y, nella

$$y'' - xy' + (n+p)y = 0,$$

[2] *Polinomi più generali di altri classici e dei loro associati, e relazioni tra essi. Funzioni di seconda specie,* « Idem », 4, (1953), pp. 363-386.

[3] Cfr. *l. c. in* [1], p. 398.

del valore di $H_{n+p}(x)$ dato dalla (2_1). Si ha così

$$(1_4) \quad nH_{n-1}(x)u'' + nB_n u' + n(p+1)H_{n-1}(x)u + A_{n+p-2} = 0, \qquad n > 0,$$

in cui B_n e A_{n+p-2} sono due polinomi di gradi uguali ai rispettivi indici, dati da

$$B_n = (n-1)H_{n-2}(x) - H_n(x),$$

$$A_{n+p-2} = 2H_n(x)[nH^{n,p}(x) - (n+p)H^{n-1,p}(x)] + \\ + 2H_{n+1}(x)[H^{n-1,p+1}(x) - H^{n,p+1}(x)].$$

Dalla (1_4) per $n=1$, segue la (2_3).

5. Avvertiamo una volta per tutte che, in questo e nei NN. successivi, si indicano con A e B delle costanti arbitrarie cui eventualmente si conglobano altri fattori costanti.

Per trovare l'integrale generale della (1_3) si ponga in essa

$$z = e^{-x^2/2}u,$$

si ha così

$$(1_5) \qquad u'' - xu' + nu = 2ne^{x^2/2}H_{n-1}(x),$$

un cui integrale particolare è

$$u = e^{x^2/2}G_{n-1}(x).$$

Pertanto l'integrale generale della (1_3), se $h_n(x)$ è la funzione d'HERMITE di 2^a specie, è

$$(2_5) \qquad z = Ae^{-x^2/2}H_n(x) + Be^{-x^2/2}h_n(x) + G_{n-1}(x),$$

cui può darsi la forma

$$z = \frac{d^n}{dx^n}[e^{-x^2/2}(A + Bh_0(x)] + G_{n-1}(x).$$

Un integrale particolare, da segnalare, si ottiene dalla (2_5) per $B=1$ qualora si tenga presente la

$$h_n(x) = H_n(x)h_0(x) - e^{x^2/2}G_{n-1}(x).$$

Si ha così

$$z = [A + h_0(x)]e^{-x^2/2}H_n(x) = [A + (-1)^n h_0(x)]\frac{d^n e^{-x^2/2}}{dx^n}\cdot$$

6. L'integrale generale della (2_3) è invece

$$u = AH_{p+3}(x) + Bh_{p+3}(x) + H^{2,p-1}(x).$$

7. Per trovare l'integrale generale della (1_4) poniamo nella

$$y'' - xy' + (n+p)y = 0,$$
$$y = nH_{n-1}(x)u,$$

ed abbiamo

$$nH_{n-1}(x)u'' + n[(n-1)H_{n-2}(x) - H_n(x)]u' + n(p+1)H_{n-1}(x)u = 0.$$

Pertanto l'integrale generale della (1_4) è

$$u = \frac{1}{H_{n-1}(x)}[AH_{n+p}(x) + Bh_{n+p}(x)] + H^{n+1,p-1}(x).$$

Se in quest'ultima si muta B in B/n e si fa $A = 1/n$, si ha a mezzo della (2_1), il seguente integrale particolare

$$u = \frac{1}{nH_{n-1}(x)}[H^{n,p}(x)H_n(x) + Bh_{n+p}(x)].$$

8. Se nella

$$x^2v'' + x(x^2-2)v' + [(p+1)x^2+2]v = 0,$$

si pone

$$v = xt,$$

si ha

$$t'' + xt' + (p+2)t = 0,$$

il cui integrale generale è

$$t = Ae^{-x^2/2}H_{p+1}(x) + Be^{-x^2/2}h_{p+1}(x).$$

Pertanto l'integrale generale della (3_3) è

$$(1_8) \qquad u = Ae^{-x^2/2}xH_{p+1}(x) + Be^{-x^2/2}xh_{p+1}(x) + H^{2,p-1}(x) =$$
$$= x\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}}[C(x)e^{-x^2/2}] + H^{2,p-1}(x),$$

ove

$$C(x) = A + Bh_0(x).$$

Se nella (1_8) si fa $B = 1$, poichè dalla (2_1) si ricava per $n = 1$

$$H_{p+1}(x)h_1(x)e^{-x^2/2} = xh_{p+1}(x)e^{-x^2/2} + H^{2,p-1}(x),$$

un integrale particolare della (3_3) è dato da

$$u = H_{p+1}(x)e^{-x^2/2}(h_1(x) + Ax) = (-1)^{p+1}(Ax + h_1(x))\frac{d^{p+1}e^{-x^2/2}}{dx^{p+1}}.$$

§ 2. - Polinomi che generalizzano quelli di Laguerre ed i loro associati.

1. Due equazioni differenziali cui soddisfano rispettivamente i polinomi $P^{\alpha,2,p-1}(x)$, $P^{\alpha,n+1,p-1}(x)$ (ove $P^{\alpha,n,p}(x)$ sono i polinomi che generalizzano sia quelli di LAGUERRE che i loro associati [4]), (cui si riducono rispettivamante per $n=0$, $n=1$) sono le seguenti

$$(1_1) \qquad (\alpha+1)xu''+(\alpha+1)Cu'+(\alpha+1)(p+1)u=4CL_p^{(\alpha+1)}(x)- \\ -4[C(x-\alpha)+x]z'-4Cz,$$

ove

$$z=P^{\alpha,1,p}(x)\equiv P^{\alpha,p+1}(x),\ \ C=\alpha+1-x,$$

essendo $P^{\alpha,p}(x)$ il polinomio associato al polinomio di LAGUERRE;

$$(2_1) \qquad D_n xL_{n-1}^{(\alpha)}(x)u''+D_nT_{n-1}u'+D_n(p+1)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)u= \\ =xL_n^{(\alpha)}(x)z''+T_nz'+pL_n^{(\alpha)}(x)z,$$

in cui

$$D_n=\frac{\alpha+n}{n+1}\,,\quad T_n=-2xL_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)+(\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)}(x)\,,\quad z=P^{\alpha,n,p}(x).$$

Si noti che la (2_1) per $n=0$, $n=1$ si riduce rispettivamente alla equazione differenziale dei polinomi di LAGUERRE ed alla (1_1).

2. Non sembra si possa dare forma molto semplice però alle formule relative alla derivata prima di $P^{\alpha,n,p}(x)$.

Ricordiamo però che altrove [5] abbiamo stabilito la

$$(\alpha+x)P^{\alpha,p\prime}(x)=(\alpha+n)P^{\alpha-1,n}(x)-(\alpha+1)P^{\alpha+1,n}(x),$$

e dimostriamo ora qui la seguente altra

$$(1_2) \qquad \alpha P^{\alpha,p\prime}(x)=(p+1)P^{\alpha-1,p+1}(x)-L_p^{(\alpha+1)}(x).$$

Pertanto notiamo innanzi tutto che, derivando la nota formula [6]

$$(2_2) \qquad l_p^{(\alpha)}(x)=L_p^{(\alpha)}(x)l_0^{(\alpha)}(x)+\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{2\pi}}e^x x^{-\alpha}P^{\alpha,p}(x),$$

[4] Cfr. *l. c.* in [2].

[5] G. PALAMÀ, *Relazioni integrali tra le funzioni d'*HERMITE *e di* LAGUERRE *di prima e di seconda specie, e su dei polinomi ad esse associati*, « Riv, Mat. Univ. Parma », 4, (1953), pp. 105-122.

[6] Cfr. *l. c.* in [2], formula $(8_1')$.

(ove $l_p^{(\alpha)}(x)$ è la funzione di LAGUERRE di 2ª specie), tenendo presente che $l_p^{(\alpha)\prime}(x) = - l_{p-1}^{(\alpha+1)}(x)$, la stessa (2_2) e che inoltre [7]

$$l_0^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{e^x}{x^{\alpha+1}}\, dx, \quad \alpha < 0, \quad x \text{ finito qualsiasi}$$

$$l_{-1}^{(\alpha)}(x) = - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^x}{x^{\alpha+1}}, \qquad \text{idem},$$

si ha

$$xP^{\alpha,p\prime}(x) = (\alpha - x)P^{\alpha,p}(x) - (\alpha+1)P^{\alpha+1,p-1}(x) + L_{p-1}^{(\alpha+1)}(x) - L_p^{(\alpha)}(x).$$

Se ora eliminiamo $(\alpha - x)P^{\alpha,p}(x) - (\alpha+1)P^{\alpha+1,p-1}(x)$, tra la precedente e la nota formula [8]

$$\alpha(\alpha+1)P^{\alpha+1,p-1}(x) - \alpha(\alpha - x)P^{\alpha,p}(x) = -(p+1)xP^{\alpha-1,p+1}(x) + \\ + (\alpha+x)L_{p-1}^{(\alpha+1)}(x) - (x-\alpha)L_p^{(\alpha)}(x),$$

si ha appunto la (1_2).

Ecco invece una formula relativa alla derivata prima di $P^{\alpha,n,p}(x)$

$$xP^{\alpha,n,p\prime}(x) = -(\alpha+n)P^{\alpha+1,n,p-1}(x) + 2nP^{\alpha+1,n-1,p}(x) - \\ - nP^{\alpha+1,n-1,p+1}(x) + (x-\alpha)P^{\alpha,n,p}(x).$$

3. Altrove [9] abbiamo visto che $P^{\alpha,n}(x)$ è integrale particolare della

$$(1_3) \qquad xz'' + (x - \alpha + 1)z' + (n+1)z = 2L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x).$$

Ora per trovare l'integrale generale della (1_3) poniamo, nella

$$xy'' + (\alpha - x + 1)y' + ny = 0,$$

$$y = x^{-\alpha}e^x z$$

(7) G. PALAMÀ, *Funzioni di* LAGUERRE *di 2ª specie*, « Boll. Un. Mat. It. », **3**, 5, (1950), pp. 72-77, ove, la formula relativa a $l_{-1}^{(\alpha)}$ del testo, è data senza il fattore $-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

(8) Cfr. *l. c.* in (5).

(9) Cfr. *l. c.* in (5).

ed abbiamo così che

$$xz'' + (x - \alpha + 1)z' + (n + 1)z = 0,$$

ha, per α non intero, l'integrale generale

$$z = Ax^{\alpha}e^{-x}L_n^{(\alpha)}(x) + Bx^{\alpha}e^{-x}l_n^{(\alpha)}(x).$$

Pertanto l'integrale generale della (1_3) è

$$z = x^{\alpha}e^{-x}[AL_n^{(\alpha)}(x) + Bl_n^{(\alpha)}(x)] + P^{\alpha, n}(x) =$$

$$= \frac{d^n}{dx^n}[x^{\alpha+n}e^{-x}(A + Bl_0^{(\alpha)}(x)] + P^{\alpha, n}(x).$$

4. L'integrale generale della (1_1) è

$$u = AL_{p+1}^{(\alpha)}(x) + Bl_{p+1}^{(\alpha)}(x) + P^{\alpha, 2, p-1}(x).$$

5. Per trovare infine l'integrale generale della (2_1), poniamo, nella

$$xL_{n-1}^{(\alpha)}(x)u'' + T_{n-1}u' + (p + 1)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)u = 0,$$

$$t = L_{n-1}^{(\alpha)}(x)u$$

ed abbiamo

$$xt'' + (\alpha - x + 1)t' + (n + p)t = 0.$$

Pertanto l'integrale generale della (2_1) è

$$(1_5) \qquad u = \frac{1}{L_{n-1}^{(\alpha)}(x)}[AL_{n+p}^{(\alpha)}(x) + Bl_{n+p}^{(\alpha)}(x)] + P^{\alpha, n+1, p-1}(x).$$

A mezzo della nota formula [10]

$$\frac{n+1}{\alpha + n}L_{n+p}^{(\alpha)}(x) + p^{\alpha, n+1, p-1}(x)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = \frac{n+1}{\alpha + n}P^{\alpha, n, p}(x)L_n^{(\alpha)}(x),$$

dalla (1_5) per $A = \dfrac{n+1}{\alpha + n}$, si ha il seguente integrale particolare della (2_1)

$$u = \frac{1}{L_{n-1}^{(\alpha)}(x)}\left[\frac{n+1}{\alpha + n}P^{\alpha, n, p}(x)L_n^{(\alpha)}(x) + Bl_{n+p}^{(\alpha)}(x)\right].$$

[10] Cfr. *l. c.* in [2].