
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIOVANNI RICCI

Una osservazione sulle funzioni maggioranti delle serie di potenze di norma finita.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 10
(1955), n.2, p. 147–153.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_2_147_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Una osservazione sulle funzioni maggioranti delle serie di potenze di norma finita.

di GIOVANNI RICCI (a Milano)

Sunto. - Si studia l'andamento, per $r \rightarrow 1 -$, della funzione $\sum |a_n| r^n$ maggiorante della funzione $f(z) = \sum a_n z^n$ ($|z| = r$), regolare per $|z| < 1$, nell'ipotesi che $\sum |a_n|^2$ sia convergente. Si danno complementi a un teorema classico di G. H. HARDY secondo il quale $\sqrt{1-r} \sum |a_n| r^n \rightarrow 0$, indagando sul modo di scegliere delle funzioni $\varphi(1/(1-r))$ moltiplicatrici che rendano positivo il $\limsup$ e il $\liminf$ del prodotto $\sqrt{(1-r)\varphi(1/(1-r))} \sum |a_n| r^n$.

1. Sia $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ convergente (almeno) per $|z| < 1$ e poniamo:
 $z = |z| e^{i\theta} = r e^{i\theta}$,

$$M(f; r) = \max_{|z| \leq r} |f(z)| \quad (\text{massimo modulo}),$$

$$\begin{aligned} M_2(f; r) &= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r e^{i\theta})|^2 d\theta \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \sum_0^\infty |a_n|^2 r^{2n} \right\}^{1/2} \quad (\text{media quadratica del modulo}) \end{aligned}$$

$$\mathcal{M}(f; r) = \sum_0^\infty |a_n| r^n \quad (\text{funzione maggiorante}).$$

È evidente che

$$(1.1) \quad M_2(f; r) \leq M(f; r) \leq \mathcal{M}(f; r)$$

ed è noto il seguente teorema di G. H. HARDY ⁽¹⁾

« Se $|f(z)|$ è limitata in $|z| < 1$ allora

$$\lim_{r \rightarrow 1-} \sqrt{1-r} \mathcal{M}(f; r) = 0 »,$$

e la dimostrazione stessa conduce alla seguente proposizione più forte « Se $\sum_0^\infty |a_n|^2$ converge (cioè se $M_2(f; r)$ è limitata in $0 \leq r < 1$)

⁽¹⁾ G. H. HARDY, *A theorem concerning Taylor's series*, « Quart. Journ. of. Math. » 44, 147-160 (1913): in particolare pp. 147-150. E. LANDAU, « Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie », Berlin 1929, pp. 31-32.

allora

$$\lim_{r \rightarrow -1} \sqrt{1-r} \mathfrak{N}(f; r) = 0.$$

Lo scopo di questa Nota è di segnalare ulteriori proprietà dell'andamento della funzione $\sqrt{1-r} \mathfrak{N}(f; r)$ quando $r \rightarrow 1-$, per le funzioni $f(z)$, dell'importante classe $\mathfrak{F}_2$, per le quali la serie $\sum_0^\infty |a_n|^2$ è convergente. È conveniente prendere in esame il $\liminf$ e $\limsup$ della funzione

$$F(r) = \sqrt{(1-r) \varphi\left(\frac{1}{1-r}\right)} \cdot \mathfrak{N}(f; r)$$

e rispondere ai tre seguenti quesiti:

a) Come si deve scegliere $\varphi(t) \rightarrow +\infty$ affinchè esista qualche $f \in \mathfrak{F}_2$ per la quale $\limsup F(r) = +\infty$?

b) È possibile e come si deve scegliere $\varphi(t) \rightarrow +\infty$ affinchè per ogni $f \in \mathfrak{F}_2$ si abbia $\liminf F(r) = 0$?

c) Come si deve scegliere $\varphi(t) \rightarrow +\infty$ affinchè esista qualche $f \in \mathfrak{F}_2$ per la quale $F(r) \rightarrow +\infty$?

Le risposte sono date dal seguente teorema.

2. TEOREMA I. - Denotiamo con $\mathfrak{F}_2$ la classe delle funzioni $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ per le quali $\sum_0^\infty |a_n|^2$ è convergente.

(A) Sia $\Phi(t)$ una funzione definita per $t > 0$ e tale che $\Phi(t) \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty$ (*lentamente quanto si vuole*); allora esiste qualche $f \in \mathfrak{F}_2$ tale che

$$(2.1) \quad \limsup_{r \rightarrow 1-} \sqrt{(1-r) \Phi\left(\frac{1}{1-r}\right)} \mathfrak{N}(f; r) = +\infty.$$

(B) Sia $\Psi(t)$ una funzione definita per $t > 0$ e tale che l'integrale

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t\Psi(t)}$$

sia *divergente*; allora per ogni $f \in \mathfrak{F}_2$ è

$$(2.2) \quad \liminf_{r \rightarrow 1-} \sqrt{(1-r) \Psi\left(\frac{1}{1-r}\right)} \mathfrak{N}(f; r) = 0.$$

(C) Sia $\Psi_1(t)$ una funzione definita per $t > 0$, *crescente* e tale che l'integrale

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t\Psi_1(t)}$$

sia *convergente* ($\Psi_1(t) \rightarrow +\infty$); allora esiste qualche $f \in \mathfrak{F}_2$ tale che

$$\sqrt{(1-r)\Psi_1\left(\frac{1}{1-r}\right)} \mathfrak{N}(f; r) \rightarrow +\infty.$$

Esempi: Esiste qualche $f \in \mathfrak{F}_2$ per la quale

$$\limsup_{r \rightarrow 1-} \sqrt{(1-r) \log \log \frac{1}{1-r}} \mathfrak{N}(f; r) = +\infty.$$

Per ogni $f \in \mathfrak{F}_2$ è

$$\liminf_{r \rightarrow 1-} \sqrt{(1-r) \log \frac{1}{1-r}} \mathfrak{N}(f; r) = 0.$$

Esiste qualche $f \in \mathfrak{F}_2$ per la quale

$$\sqrt{(1-r) \log \frac{1}{1-r} \left(\log \log \frac{1}{1-r} \right)^{1+\varepsilon}} \mathfrak{N}(f; r) \rightarrow +\infty.$$

Come conseguenza di (B) e (C) otteniamo il seguente

TEOREMA II. - Sia $\varphi(t)$ definita per $t > 0$, *crescente* e $\varphi(t) \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty$. Condizione necessaria e sufficiente affinchè si abbia

$$\liminf_{r \rightarrow 1-} \sqrt{(1-r)\varphi\left(\frac{1}{1-r}\right)} \mathfrak{N}(f; r) = 0$$

per qualunque funzione $f(z) \in \mathfrak{F}_2$ è che l'integrale $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t\varphi(t)}$ sia divergente.

3. **Dimostrazione di (A).** - Fissato $\varepsilon > 0$, si scelga la successione crescente $\{q_h\}$ di interi q_h in guisa da avere $\sqrt[3]{\varphi(q_h)} \geq h^{1+\varepsilon}$ e, posto

$$\tau_h = 1 + \frac{1}{h^{1+\varepsilon}}, \quad p_h = \left\lceil \frac{q_h}{\tau_h} \right\rceil,$$

si consideri la funzione

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n \text{ dove } a_n = \begin{cases} 1/\sqrt{n} & \text{per } p_h \leq n \leq q_h \quad (h=1, 2, 3, \dots), \\ 0 & \text{in ogni altro caso.} \end{cases}$$

Si vede che $f \in \mathcal{F}_2$; infatti

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} a_n^2 &= \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{p_h}^{q_h} \frac{1}{n} = \sum_{h=1}^{\infty} (1 + o(1)) \log(q_h/p_h) \\ &= \sum_{h=1}^{\infty} (1 + o(1)) \log \tau_h \\ &= \sum_{h=1}^{\infty} (1 + o(1))/h^{1+\varepsilon} \\ &= O\left(\sum_{h=1}^{\infty} 1/h^{1+\varepsilon}\right) = O(1). \end{aligned}$$

Veniamo a dimostrare che vale (2.1). Per ogni h vale

$$\mathfrak{N}(f; r) = \sum_0^{\infty} a_n r^n \geq \sum_{p_h}^{q_h} a_n r^n \geq r^{q_h} \sum_{p_h}^{q_h} a_n.$$

Si scelga $r_h = 1 - 1/q_h$, allora è

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}(f; r_h) &\geq \left(1 - \frac{1}{q_h}\right)^{q_h} \sum_{p_h}^{q_h} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{1 + o(1)}{e} \int_{p_h}^{q_h} \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{2 + o(1)}{e} (\sqrt{q_h} - \sqrt{p_h}) \\ &\sim \frac{2}{e} \sqrt{q_h} (1 - 1/\sqrt{\tau_h}) \\ &\sim \frac{2}{e} \frac{1}{\sqrt{1 - r_h}} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{1}{h^{1+\varepsilon}}\right)^{-1/2} \right\} \\ &\sim \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - r_h}} \cdot \frac{1}{h^{1+\varepsilon}} \\ &> \frac{1}{2e} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - r_h}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\Phi(q_h)}} \end{aligned}$$

per h abbastanza grande. Si ricava

$$\sqrt{(1-r_h) \Phi\left(\frac{1}{1-r_h}\right)} \mathfrak{N}(f; r_h) > \frac{1}{2e} \sqrt{\Phi\left(\frac{1}{1-r_h}\right)},$$

da cui segue la (2.1), poiché $\Phi(t) \rightarrow +\infty$.

4. Dimostrazione di (B). - Si consideri la seguente interessante disuguaglianza del « tipo di RIESZ-FISCHER » stabilita da G. H. HARDY-J. E. LITTLEWOOD ⁽²⁾, insieme a tante altre, in una classica memoria sulle serie a termini positivi:

Se $c_n \geq 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) e $p > 1$, esiste $K = K(p)$ tale che

$$\int_0^1 (1-x)^{p-2} \left\{ \sum_1^\infty c_n x^n \right\}^p dx \leq K(p) \sum_1^\infty c_n^p.$$

Facendovi $p = 2$ e osservando che $r \mathfrak{N}(f; r) = \sum_0^\infty |a_n| r^{n+1}$, $|a_n| \geq 0$, otteniamo:

$$(4.1) \quad \int_0^1 r^2 \mathfrak{N}^2(f; r) dr \leq K(2) \sum_0^\infty |a_n|^2 = K(2) M_2^2(f; 1).$$

L'ipotesi sulla funzione $\Psi(t)$, col cambiamento di variabile $t = 1/(1-r)$, ci dice che l'integrale

$$(4.2) \quad \int_{r_0}^1 \frac{dr}{(1-r) \Psi\left(\frac{1}{1-r}\right)} \quad (0 < r_0 < 1)$$

è divergente. Se, per assurdo, non valesse (2.2) esisterebbe $\delta > 0$ tale che per $r \geq r_0(\delta)$

$$(4.3) \quad \mathfrak{N}(f; r) > \delta / \sqrt{(1-r) \Psi\left(\frac{1}{1-r}\right)}$$

e, per la divergenza dell'integrale (4.2), avremmo:

$$\int_0^{1-\varepsilon} r^2 \mathfrak{N}^2(f; r) dr / M_2^2(f; 1) \rightarrow +\infty \text{ per } \varepsilon \rightarrow 0 +$$

e non esisterebbe la costante $K(2)$ della (4.1).

⁽²⁾ G. H. HARDY - J. E. LITTLEWOOD, *Elementary theorems concerning power series...*, « Journ. für Math. » 157, 141-158 (1927).

5. **Dimostrazione di (C).** - Si scelga la funzione crescente $\Psi_2(t) \rightarrow +\infty$, tale che

$$\Psi_1(t)/\Psi_2(t) \rightarrow +\infty, \quad \int_1^{\infty} \frac{dt}{t\Psi_2(t)} < +\infty \text{ (convergente)}$$

(questo è possibile ⁽³⁾) e definiamo

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n \text{ con } a_0 = 0, \quad a_n = 1/\sqrt{n\Psi_2(n)} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Allora $f \in \mathcal{F}_2$; infatti

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} |a_n|^2 &= \sum_1^{\infty} a_n^2 = \sum_1^{\infty} 1/(n\Psi_2(n)) \\ &\leq \frac{1}{\Psi_2(1)} + \int_1^{\infty} \frac{dt}{t\Psi_2(t)} \text{ (convergente).} \end{aligned}$$

Per ogni r , $0 < r < 1$, si definisca l'intero $h = h(r)$ nel modo

$$^{(3)} \text{ Poniamo } I(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{t\Psi_1(t)}, \quad J(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{t\Psi_2(t)}, \quad I(1, \infty) = c > 0, \text{ e sce-}$$

gliamo la successione $t_1 = 1 < t_2 < t_3 < \dots$ in guisa che sia $I(t_k, t_{k+1}) = c/2^k$. Consideriamo una successione parziale $\{\tau_s\}$ di $\{t_k\}$, con $\tau_s = t_{k_s}$, scelta in guisa che $\Psi_1(\tau_s) \cdot s^2/2^s$ sia crescente e $\rightarrow +\infty$ (questa esiste poich  $\Psi_1(t)$ cresce e $\rightarrow +\infty$). Poniamo

$$\Psi_2(\tau_s) = \Psi_1(\tau_s) \cdot s^2/2^s, \quad \Psi_2(\tau_{s+1}) = \Psi_1(\tau_{s+1})(s+1)^2/2^{s+1} \quad (s = 1, 2, 3, \dots)$$

e nell'intervallo $\tau_s \leq t \leq \tau_{s+1}$ si scelga $\Psi_2(t)$ in guisa che essa sia crescente e soddisfacente alla limitazione, per $s \geq 3$:

$$\Psi_1(t) \cdot (s+1)^2/2^{s+1} \leq \Psi_2(t) \leq \Psi_1(t) \cdot s^2/2^s$$

[per esempio $\Psi_2(t) = \text{Min}(\Psi_1(t) \cdot s^2/2^s, \Psi_1(\tau_{s+1}) \cdot (s+1)^2/2^{s+1})$]. $\Psi_2(t)$ risulta crescente e poich  $2^s/s^2 \rightarrow +\infty$, il rapporto $\omega(t) = \Psi_1(t)/\Psi_2(t) \rightarrow +\infty$ e inoltre $J(1, \infty)$   convergente : infatti

$$\begin{aligned} J(\tau_s, \tau_{s+1}) &= \int_{\tau_s}^{\tau_{s+1}} \frac{\omega(t) dt}{t} \leq \frac{2^{s+1}}{(s+1)^2} \cdot I(\tau_s, \tau_{s+1}) \\ &\leq \frac{2^{s+1}}{(s+1)^2} \cdot \sum_{k_s}^{\infty} \frac{c}{2^k} \quad (s \leq k_s) \\ &\leq 4c/(s+1)^2. \end{aligned}$$

$$J(\tau_3, \infty) \leq 4c \cdot \sum 1/(s+1)^2 \text{ convergente.}$$

seguinte

$$1 - 1/h \leq r < 1 - 1/(h+1).$$

Allora

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}(f; r) &= \sum_0^\infty a_n r^n > \sum_0^h a_n r^n \geq \sum_1^h \frac{1}{\sqrt{n\Psi_2(n)}} \left(1 - \frac{1}{h}\right)^n \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{h}\right)^h \int_1^h \frac{du}{\sqrt{u\Psi_2(u)}} \\ &> \frac{1}{2e} \frac{1}{\sqrt{\Psi_2(h)}} \int_1^h \frac{du}{\sqrt{u}} \quad (\text{per } h \text{ abbastanza grande}) \\ &= \frac{1}{e} \frac{\sqrt{h} - 1}{\sqrt{\Psi_2(h)}}. \end{aligned}$$

Ricordando la definizione di h ($h \leq 1/(1-r) < h+1$) abbiamo, per r abbastanza prossimo a 1

$$\sqrt{(1-r) \cdot \Psi_2\left(\frac{1}{1-r}\right)} \mathfrak{N}(f; r) > \frac{1}{2e}.$$

Per la scelta di Ψ_2 (essendo $\Psi_1/\Psi_2 \rightarrow +\infty$) da questa disuguaglianza segue la (2.3).

Il Teorema I risulta così completamente dimostrato.