BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ALESSANDRO OSSICINI

Polinomi associati alle funzioni ultrasferiche di seconda specie.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 9
(1954), n.2, p. 170–177.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_2_170_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Polinomi associati alle funzioni ultrasferiche di seconda specie.

Nota di ALESSANDRO OSSICINI (a Roma)

Sunto. - Si dà una formula per le funzioni ultrasferiche di seconda specie, ove intervengono dei polinomi dei quali si determinano alcune proprietà.

1. In una nota, apparsa in questo « Bollettino » (1), abbiamo dimostrato che per le funzioni ultrasferiche di seconda specie sussiste la formula

$$[1.1] \quad Q_n^{(\lambda)}(x) = \frac{(-1)^n \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma(n+2\lambda)}{2^n n! \Gamma(2\lambda) \Gamma(n+\lambda)} (x^2-1)^{\frac{1}{2}-\lambda} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^{n+\lambda-\frac{1}{2}} \int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1)^{n+\lambda+\frac{1}{2}}},$$

valida per x arbitrario nel piano complesso tagliato lungo il segmento $(-1, +1)$ e $\lambda \geq -\frac{1}{2}$, $n \geq 0$ (escluso $n = \lambda = 0$).

Per dette funzioni si ha inoltre la formula ricorrente:

$$[1.2] \quad (n+1)Q_{n+1}^{(\lambda)}(x) = 2(n+\lambda)xQ_n^{(\lambda)}(x) - (n+2\lambda-1)Q_{n-1}^{(\lambda)}(x).$$

Ora ci proponiamo di dimostrare che si ha

$$[1.3] \quad Q_n^{(\lambda)}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)} \left[P_n^{(\lambda)}(x) I_\lambda(x) - \frac{W_{n-1}^{(\lambda)}(x)}{(x^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}} \right]$$

$\lambda \geq -\frac{1}{2}$, $n \geq 0$ (escluso $n = \lambda = 0$) e x qualsiasi purchè non reale e compreso tra ∓ 1 , ove $P_n^{(\lambda)}(x)$ indica il polinomio ultrasferico di ordine n ,

$$I_\lambda(x) = \int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1)^{\lambda+\frac{1}{2}}},$$

e $W_n^{(\lambda)}(x)$ è il polinomio di grado n in x definito dalle

$$[1.4] \quad (n+2)W_{n+1}^{(\lambda)}(x) = 2(n+\lambda+1)xW_n^{(\lambda)}(x) - (n+2\lambda)W_{n-1}^{(\lambda)}(x),$$

essendo inoltre $W_{-1}^{(\lambda)}(x) = 0$, $W_0^{(\lambda)}(x) = 1$.

(1) Cfr. A. OSSICINI, *Sulle funzioni ultrasferiche di seconda specie*, « Boll. dell'Un. Mat. Ital. », 3, anno VI, (dicembre 1951), n. 4. pp. 311-315.

I polinomi $W_n^{(\lambda)}(x)$ li diciamo associati alle funzioni ultrasferiche di seconda specie.

2. La relazione

$$[1.3] \quad Q_n^{(\lambda)}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)} \left[P_n^{(\lambda)}(x)I_\lambda(x) - \frac{W_{n-1}^{(\lambda)}(x)}{(x^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}}} \right],$$

valida per $n = 0$ e per $n = 1$, sarà dimostrata in generale se ne constatiamo la validità per le funzioni ultrasferiche di seconda specie di ordine $n + 1$, qualora si supponga verificata per quelle di ordine non superiore ad n . Ora se sostituiamo nella [1.2] i valori di $Q_n^{(\lambda)}(x)$ e di $Q_{n-1}^{(\lambda)}(x)$, che si ottengono dalla [1.3], abbiamo in base alla [1.4] e alla (2)

$$[2.1] \quad (n + 1)P_{n+1}^{(\lambda)}(x) = 2(n + \lambda)xP_n^{(\lambda)}(x) - (n + 2\lambda - 1)P_{n-1}^{(\lambda)}(x),$$

che

$$Q_{n+1}^{(\lambda)}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)} \left[P_{n+1}^{(\lambda)}(x)I_\lambda(x) - \frac{W_n^{(\lambda)}(x)}{(x^2 - 1)^{\lambda - \frac{1}{2}}} \right];$$

alla stessa formula saremo pervenuti se nella [1.3] avessimo posto in luogo di n , $n + 1$. Resta quindi dimostrata la [1.3].

Nel caso in cui x è reale e compreso tra ± 1 , $Q_n^{(\lambda)}(x)$ è definita dalla relazione (3)

$$[2.2] \quad (-1)^{E\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)} Q_n^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{2} \left\{ e^{-i\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\pi} Q_n^{(\lambda)}(x \cdot 0i) + e^{i\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\pi} Q_n^{(\lambda)}(x - 0i) \right\},$$

ove il simbolo $E\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)$ indica la parte intera del numero $\lambda - \frac{1}{2}$.

Ora abbiamo dalla [1.3]

$$Q_n^{(\lambda)}(x \pm 0i) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)} \left[P_n^{(\lambda)}(x) \int_x^\infty \frac{dx}{(x^2 - 1)^{\lambda + \frac{1}{2}}} - \frac{e^{\pm i\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\pi}}{(1 - x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}} W_{n-1}^{(\lambda)}(x) \right].$$

(2) Cfr. G. SZEGO, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., XXIII, (New York, 1939), p. 82.

(3) Cfr. A. OSSICINI, op. cit. (1), p. 314.

Nell'integrale l'integrazione è presa dal punto x all' ∞ lungo linee sopra o sotto l'asse reale delle x secondo che si considera il segno superiore od inferiore in $\pm 0i$.

Poichè detto integrale può essere preso da 0 a x lungo l'asse reale e da 0 a $+i\infty$ o $-i\infty$ lungo l'asse immaginario noi abbiamo

$$Q_n^{(\lambda)}(x \pm 0i) = \\ = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)} e^{\pm i\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\pi} \left[P_n^{(\lambda)}(x) \int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)^{\lambda + \frac{1}{2}}} - \right. \\ \left. - P_n^{(\lambda)}(x) \int_0^\infty \frac{idu}{(1+u^2)^{\lambda + \frac{1}{2}}} - \frac{W_{n-1}^{(\lambda)}(x)}{(1-x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}} \right].$$

e siccome è

$$\int_0^\infty \frac{du}{(1+u^2)^{\lambda + \frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\lambda)}{2\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)},$$

otteniamo

$$Q_n^{(\lambda)}(x \pm 0i) = \\ = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)} e^{\pm i\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\pi} \left[P_n^{(\lambda)}(x) \int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)^{\lambda + \frac{1}{2}}} - \frac{W_{n-1}^{(\lambda)}(x)}{(1-x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}} \right] \pm \\ \pm \frac{1}{2} \pi i e^{\pm i\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\pi} P_n^{(\lambda)}(x).$$

Per la [2.2] infine ne segue

$$(2.3) \quad Q_n^{(\lambda)}(x) = (-1)^{E\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)} \left[P_n^{(\lambda)}(x) \int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)^{\lambda + \frac{1}{2}}} - \frac{W_{n-1}^{(\lambda)}(x)}{(1-x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}} \right].$$

Nel caso particolare $\lambda = \frac{1}{2}$ si ha dalla [1.3] la

$$(2.4) \quad Q_n^{(\frac{1}{2})}(x) = \frac{1}{2} P_n^{(\frac{1}{2})}(x) \log \frac{x+1}{x-1} - W_{n-1}^{(\frac{1}{2})}(x),$$

valida per qualsiasi valore di x che non sia reale e compreso tra ± 1 , e dalla [2.3] si ha

$$[2.5] \quad Q_n^{(\frac{1}{2})}(x) = \frac{1}{2} P_n^{(\lambda)}(x) \log \frac{1+x}{1-x} - W_{n-1}^{(\frac{1}{2})}(x).$$

valida per x reale e compreso tra ∓ 1 .

Le [2.4], [2.5] sono le formule relative alla funzione di LEGENDRE di seconda specie (4).

3. Stabiliamo ora alcune formule ricorrenti relative ai $P_n^{(\lambda)}(x)$, $Q_n^{(\lambda)}(x)$, e ai $W_n^{(\lambda)}(x)$.

Moltiplicando la [1.2] per $P_n^{(\lambda)}(x)$ e la [2.1] per $Q_n^{(\lambda)}(x)$ e sottraendo membro a membro otteniamo

$$[3.1] \quad \begin{aligned} & Q_{n+1}^{(\lambda)}(x)P_n^{(\lambda)}(x) - Q_n^{(\lambda)}(x)P_{n+1}^{(\lambda)}(x) = \\ & = \frac{n+2\lambda-1}{n+1} [Q_n^{(\lambda)}(x)P_{n-1}^{(\lambda)}(x) - Q_{n-1}^{(\lambda)}(x)P_n^{(\lambda)}(x)], \end{aligned}$$

cambiando nella [3.1] successivamente n in $n-1$, $n-2$, ..., 2 , 1 , e moltiplicando le relazioni che si ottengono abbiamo

$$[3.2] \quad \begin{aligned} & Q_{n+1}^{(\lambda)}(x)P_n^{(\lambda)}(x) - Q_n^{(\lambda)}(x)P_{n+1}^{(\lambda)}(x) = \\ & = \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{(n+1)! \Gamma(2\lambda)} [Q_1^{(\lambda)}(x)P_0^{(\lambda)}(x) - Q_0^{(\lambda)}(x)P_1^{(\lambda)}(x)], \end{aligned}$$

poichè

$$[3.3] \quad \begin{aligned} P_0^{(\lambda)}(x) = 1, \quad P_1^{(\lambda)}(x) = 2\lambda x, \quad Q_0^{(\lambda)}(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda)} \int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1)^{\lambda + \frac{1}{2}}} \\ Q_1^{(\lambda)}(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda)} \left[\int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1)^{\lambda + \frac{1}{2}}} - \frac{1}{(x^2-1)^{\lambda - \frac{1}{2}}} \right], \end{aligned}$$

si conclude

$$[3.4] \quad \begin{aligned} & Q_{n+1}^{(\lambda)}(x)P_n^{(\lambda)}(x) - Q_n^{(\lambda)}(x)P_{n+1}^{(\lambda)}(x) = - \\ & - \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})\Gamma(n+2\lambda)}{(n+1)! \Gamma(\lambda)\Gamma(2\lambda)} \frac{1}{(x^2-1)^{\lambda - \frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

valida per qualsiasi valore di x che non sia reale e compreso tra ∓ 1 .

(4) Cfr. E. W. HOBSON. *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*, (Cambridge, 1931), p. 51.

Nel caso che x sia reale e compreso tra ∓ 1 si ha

$$[3.5] \quad Q_{n+1}^{(\lambda)}(x)P_n^{(\lambda)}(x) - Q_n^{(\lambda)}(x)P_{n+1}^{(\lambda)}(x) = - \frac{(-1)^E \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma(n+2\lambda)}{(n+1)! \Gamma(\lambda) \Gamma(2\lambda)} \frac{1}{(1-x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}}.$$

Sostituendo nella [3.4] i valori di $Q_n^{(\lambda)}(x)$, $Q_{n-1}^{(\lambda)}(x)$ che si traggono dalla [1.3] si ha

$$[3.6] \quad P_{n+1}^{(\lambda)}(x)W_{n-2}^{(\lambda)}(x) - P_n^{(\lambda)}(x)W_{n-1}^{(\lambda)}(x) = \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{(n+1)! \Gamma(2\lambda)}.$$

Se invece sostituiamo nella [3.3] i valori di $P_n^{(\lambda)}(x)$, $P_{n-1}^{(\lambda)}(x)$ ottenuti sempre dalla [1.3] abbiamo

$$[3.7] \quad Q_{n+1}^{(\lambda)}(x)W_{n-2}^{(\lambda)}(x) - Q_n^{(\lambda)}(x)W_{n-1}^{(\lambda)}(x) = - \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{(n+1)! \Gamma(2\lambda)} \int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1)^{\lambda + \frac{1}{2}}},$$

valida per qualsiasi valore di x che non sia reale e compreso tra ∓ 1 .

Nel caso che x sia reale e compreso tra ∓ 1 utilizzando la [2.3] si ha

$$[3.8] \quad Q_{n+1}^{(\lambda)}(x)W_{n-2}^{(\lambda)}(x) - Q_n^{(\lambda)}(x)W_{n-1}^{(\lambda)}(x) = - \frac{(-1)^E \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \Gamma(n+2\lambda)}{(n+1)! \Gamma(2\lambda)} \int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)^{\lambda + \frac{1}{2}}}.$$

4. Partendo dalla [3.4] possiamo determinare uno sviluppo relativo ai polinomi associati.

Abbiamo dalla [3.4]

$$[4.1] \quad \frac{Q_{n+1}^{(\lambda)}(x)}{P_{n+1}^{(\lambda)}(x)} - \frac{Q_n^{(\lambda)}(x)}{P_n^{(\lambda)}(x)} = - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma(n+2\lambda)}{P_{n+1}^{(\lambda)}(x)P_n^{(\lambda)}(x)(n+1)! \Gamma(\lambda) \Gamma(2\lambda)(x^2-1)^{\lambda - \frac{1}{2}}},$$

cambiando n in $n-1$, $n-2$, ..., 2 , 1 e sommando otteniamo

$$[4.2] \quad \frac{Q_{n+1}^{(\lambda)}(x)}{P_{n+1}^{(\lambda)}(x)} - \frac{Q_0^{(\lambda)}(x)}{P_0^{(\lambda)}(x)} = - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda) \Gamma(2\lambda)} \sum_{s=1}^{n+1} \frac{\Gamma(s+2\lambda-1)}{s! P_s^{(\lambda)}(x) P_{s-1}^{(\lambda)}(x)}.$$

Dal confronto delle [1.3], [4.2], se si tiene conto della [3.3], si ha

$$[4.3] \quad W_n^{(\lambda)}(x) = P_{n+1}^{(\lambda)}(x) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(2\lambda)} \sum_{s=1}^{n+1} \frac{\Gamma(s + 2\lambda - 1)}{s! P_s^{(\lambda)}(x) P_{s-1}^{(\lambda)}(x)}.$$

Nel caso $\lambda = \frac{1}{2}$ la [4.3] diviene

$$[4.4] \quad W_n^{(\frac{1}{2})}(x) = P_{n+1}^{(\frac{1}{2})}(x) \sum_{s=1}^{n+1} \frac{1}{s P_s^{(\frac{1}{2})}(x) P_{s-1}^{(\frac{1}{2})}(x)},$$

la [4.4] è lo sviluppo relativo ai polinomi associati alle funzioni di LEGENDRE di seconda specie ⁽⁵⁾.

5. Per ultimo ci determiniamo lo sviluppo secondo le potenze di $\frac{x-1}{2}$ dei polinomi associati $W_n^{(\lambda)}(x)$.

Sostituendo l'espressione [1.3] nell'equazione dei polinomi ultrasferici di grado $n+1$ e delle funzioni ultrasferiche di seconda specie di ordine $n+1$

$$[5.1] \quad (1-x^2)y'' - (2\lambda+1)xy' + (n+1)(n+2\lambda+1)y = 0,$$

otteniamo che $W_n^{(\lambda)}(x)$ soddisfa l'equazione differenziale:

$$[5.2] \quad (1-x^2)y'' - (2\lambda-3)xy' + (n+2)(n+2\lambda)y = 2 \frac{dP_{n+1}^{(\lambda)}(x)}{dx}.$$

Se effettuiamo il cambiamento della variabile indipendente x dato da

$$u = \frac{x-1}{2},$$

e ricordiamo che si ha ⁽⁶⁾

$$\frac{dP_{n+1}^{(\lambda)}(x)}{dx} = 2\lambda P_n^{(\lambda+1)}(x),$$

$$P_n^{(\lambda+1)}(x) = \frac{\Gamma(n+2\lambda+2)}{n! \Gamma(2\lambda+2)} F\left(n+2\lambda+2, -n, \lambda+\frac{3}{2}, \frac{1-x}{2}\right),$$

ove F è la funzione ipergeometrica di GAUSS ⁽⁷⁾, otteniamo

$$[5.3] \quad -u(u+1)y + \left(\lambda - \frac{3}{2}\right)(2u+1)y' + (n+2)(n+2\lambda)y = \sum_{s=0}^n f_s u^s$$

⁽⁵⁾ Cfr. E. W. HOBSON, op. cit. ⁽⁴⁾, p. 72.

⁽⁶⁾ Cfr. G. SZEGO, op. cit. ⁽²⁾, p. 81.

⁽⁷⁾ Cfr. G. SANSONE, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa*, Volume secondo, (Padova, 1949), p. 58.

con

$$f_s = \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(n + s + 2\lambda + 2)}{s!(n-s)!\Gamma\left(s + \lambda + \frac{3}{2}\right)}.$$

Se poniamo

$$[5.4] \quad y = \sum_{s=0}^n a_s u^s$$

e sostituiamo nella [5.3] avremo che i coefficienti a_s devono verificare le relazioni ($s = 0, 1, 2, \dots, n-1, n$)

$$[5.5] \quad a_s(n+s+2)(n-s+2\lambda) + a_{s+1}(s+1)\left(\lambda - \frac{3}{2} - s\right) = f_s,$$

con $a_{n+1} = 0$.

Dalla [5.5] abbiamo che i coefficienti a_s sono dati in funzione

di a_0 , dalle ($s = 1, 2, 3, \dots, n, n+1$), $\left(-\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{2}\right)$

$$[5.6] \quad a_s = \frac{(n+s+1)!}{(n+1)!} \frac{\Gamma(n+2\lambda+1)}{\Gamma(n+s+2\lambda+1)} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\lambda\right)}{s!\Gamma\left(s+\frac{3}{2}-\lambda\right)} \times!$$

$$\times \left[a_0 - \frac{(n+1)!\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\lambda\right)\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+2\lambda+1)} \sum_{t=1}^s \frac{\Gamma(2\lambda+n+1+t)\Gamma(n+2\lambda+1-t)\Gamma\left(t+\frac{3}{2}-\lambda\right)}{t\Gamma\left(\lambda+t+\frac{1}{2}\right)(n+1+t)!(n+1-t)!} \right],$$

essendo quindi $a_{n+1} = 0$ ne segue

$$[5.7] \quad a_0 = \frac{(n+1)!\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\lambda\right)\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+2\lambda+1)} \sum_{t=1}^{n+1} \frac{\Gamma(n+2\lambda+1+t)\Gamma(n+2\lambda+1-t)\Gamma\left(t+\frac{3}{2}-\lambda\right)}{t\Gamma\left(\lambda+t+\frac{1}{2}\right)(n+1+t)!(n+1-t)!}$$

ed infine ($s = 0, 1, 2, \dots, n-1, n$), $\left(-\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{2}\right)$.

$$[5.8] \quad a_s = \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)(n+s+1)!}{s!\Gamma(2\lambda)\Gamma\left(s+\frac{3}{2}-\lambda\right)\Gamma(n+2\lambda+1-s)} \sum_{t=s+1}^{n+1} \frac{\Gamma(n+2\lambda+1+t)\Gamma(n+2\lambda+1-t)\Gamma\left(t+\frac{3}{2}-\lambda\right)}{t\Gamma\left(\lambda+t+\frac{1}{2}\right)(n+1+t)!(n+1-t)!}.$$

Si ottiene quindi per i polinomi $W_n^{(\lambda)}(x)$ l'espressione

$$\left(-\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{2}\right)$$

$$[5.9] \quad W_n^{(\lambda)}(x) = \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)} \sum_{s=0}^n \frac{K_{n,s}(n+s+1)!}{s!\Gamma\left(s+\frac{3}{2}-\lambda\right)\Gamma(n+2\lambda+1-s)} \left(\frac{1-x}{2}\right),$$

ove $K_{n,s}$ denota

$$K_{n,s} = \sum_{t=s+1}^{n+1} \frac{\Gamma(n+2\lambda+1+t)\Gamma(n+2\lambda+1-t)\Gamma\left(t+\frac{2}{3}-\lambda\right)}{t\Gamma\left(\lambda+t+\frac{1}{2}\right)(n+1+t)!(n+1-t)!}.$$