
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MODESTO DEDÒ

Una dimostrazione del teorema di Lüroth.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 9
(1954), n.2, p. 141–143.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_2_141_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Una dimostrazione del teorema di Lüroth.

Nota di MODESTO DEDÒ (a Nisida)

Sunto. - *Data, sulla retta, una serie algebrica γ_n^1 , si costruisce una g_n^1 che ha con quella $n(n-1) > (n-1)^2$ coppie di punti comuni e che, pertanto coincide con la serie data.*

1. Un ben noto teorema di LÜROTH, fondamentale nella geometria algebrica, afferma che *sulla retta, ogni serie algebrica irriducibile ∞^1 di gruppi di n punti, tale che un punto generico della retta appartenga ad un solo gruppo della serie, è costituita dai gruppi di livello di una funzione razionale, cioè è una serie lineare* ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Un enunciato equivalente è il seguente: *se una curva algebrica C ammette una rappresentazione razionale tale che un punto generico della curva C sia determinato da n valori del parametro λ , è sempre possibile determinare un nuovo parametro μ (funzione razionale di λ) tale che, nella nuova rappresentazione parametrica, un punto generico provenga da un solo valore del parametro μ . In questa forma si trova in J. LÜROTH, *Beveis eines Satzes über rationale Curven*, Math. Annalen 9, 163 (1876).*

Questo teorema è riportato in tutti i trattati di geometria algebrica; v. in particolare APPEL GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques*, 2^a ediz. T. I., Paris, 1929, pag. 283. BERTINI, *Geometria proiettiva degli iperspazi*, 2^a ediz. Messina 1923, pag. 264. ENRIQUES CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni*, Vol. I, Bologna 1929, pag. 167. SEVERI, *Trattato di geometria algebrica*, Vol. I, parte I, Bologna 1926. pag. 29.

Scopo del presente lavoro è di segnalare una dimostrazione indipendente dagli abituali processi di simmetrizzazione, (che suppongo nuova) e che mi sembra interessante per la sua semplicità; essa è suggerita dalla osservazione che se una serie algebrica γ_n^1 e una serie lineare g_n^1 coincidono, esse hanno (tutti i gruppi in comune e quindi in particolare) più coppie di punti in comune di quante ne comporti il teorema di BÉZOUT.

2. Premettiamo il seguente

LEMMA. — *Si considerino sulla retta due (distinte) serie algebriche (irriducibili) ∞^1 di gruppi di n punti, γ_n^1 e δ_n^1 , tali che un punto generico della retta appartenga ad un solo gruppo della γ_n^1 e ad un solo gruppo della δ_n^1 . Le due serie considerate hanno $(n-1)^2$ coppie di punti comuni;*

Questo fatto è banale e notissimo per le g_n^1 e viene dimostrato con ragionamenti che non suppongono la razionalità delle involuzioni coincidenti. Quantunque inutile, per comodità del lettore presentiamo una dimostrazione fondata sul principio di corrispondenza.

Sia P un punto generico della retta. Al punto P associamo gli $n-1$ punti $C_2, C_3, \dots, C_n$ che, con P , costituiscono un gruppo della serie γ_n^1 e, d'altra parte, associamo gli $n-1$ punti $D_2, D_3, \dots, D_n$ che con P costituiscono un gruppo della serie δ_n^1 . Otteniamo così sulla retta, una corrispondenza algebrica tra i punti C_i e D_i che appartengono a due gruppi, delle due serie considerate, aventi un punto, P , in comune. I punti uniti di questa corrispondenza appartengono a coppie di punti comuni alle due serie. Gli indici della corrispondenza (simmetrica) sono $(n-1)^2$ e $(n-1)^2$; infatti ogni punto C_i proviene da $n-1$ punti P e ogni punto P dà luogo ad $n-1$ punti D_i . Per il principio di CHASLES (cioè, in definitiva, per il teorema di BÉZOUT) si hanno quindi $2(n-1)^2$ punti uniti. Osservando infine che ogni coppia di punti comuni viene così trovata due volte (una volta per ciascuno dei due punti che la compongono) possiamo concludere che sono effettivamente $(n-1)^2$ le coppie di punti comuni alle due serie considerate.

3. Veniamo ora alla dimostrazione del teorema di LÜROTH.

Sia γ_n^1 la serie algebrica data e siano Γ_n e Γ'_n due suoi gruppi. Consideriamo la serie lineare g_n^1 determinata dai due gruppi Γ_n e Γ'_n (cioè definita dai gruppi di livello della funzione razionale che ha Γ_n come gruppo dei poli e Γ'_n come gruppo degli zeri). Le due serie γ_n^1 e g_n^1 hanno in comune due gruppi di n punti, cia-

scuno dei quali equivale a $\binom{n}{2}$ coppie. Si ha ovviamente

$$2 \cdot \binom{n}{2} > (n-1)^2 \quad (\text{appena sia } n > 1).$$

Pertanto se la serie γ_n^1 è irriducibile (cioè, data l'ipotesi, se non contiene gruppi isolati e se non è ottenuta contando v volte i gruppi di una serie lineare $\underset{v}{g_n^1}$) coincide con la serie lineare g_n^1 da noi costruita.