BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

G. Palamà

Sul Wronskiano delle funzioni di Laguerre di 1ª e 2ª specie e su dei polinomi ad esse associati.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.2, p. 185–193.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_2_185_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1953.

Sul Wronskiano delle funzioni di Laguerre di 1ª e 2ª specie e su dei polinomi ad esse associati.

Nota di G. PALAMÀ (a Lecce)

Sunto. - *Stabiliamo in questa Nota per il Wronskiano delle funzioni di 1ª e 2ª specie* (1) *la formula*

$$W_{\alpha,\, n}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)e^{x}}{\sqrt{2\pi}\, n\,!\, x^{\alpha+1}}\;;$$

ed esprimiamo le funzioni di Laguerre di 2ª specie a mezzo, o di alcuni polinomi $\mathrm{P}_{\mathrm{n}}^{(\alpha)}(\mathrm{x})$, *che li diciamo* associati *di tali funzioni di 1ª e 2ª specie, o dei polinomi di Laguerre, e di alcune classiche funzioni.*

1. Sussistono per le funzioni di LAGUERRE di 2ª specie le formule

$$l_{n-1}^{(\alpha)}(x) = -\, l_{n-2}^{(\alpha+1)}(x) + l_{n-1}^{(\alpha+1)}(x), \tag{1}$$

$$x l_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) = -\, n l_{n}^{(\alpha)}(x) + (\alpha + n) l_{n-1}^{(\alpha)}(x). \tag{2}$$

Per dimostrarle basta mettervi al posto di $l_{n}^{(\alpha)}(x)$ lo sviluppo

$$l_{n}^{(\alpha)}(x) = \frac{-\,\Gamma(\alpha + n + 1)}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha - m)x^{m-\alpha}}{\Gamma(\alpha + n - m + 1)m\,!}\,, \tag{3}$$

ove si suppone x finito non nullo ed α non intero qualsiasi, e verificare che in ciascuna è identicamente nullo il coefficiente di $x^{m-\alpha}$.

Del resto l'analoga della (2) per i polinomi di LAGUERRE segue da formule che sussistono anche per le $l_{n}^{(\alpha)}(x)$.

(1) Cfr. G. PALAMÀ, *Funzioni di Laguerre di 2ª specie*, « Boll. dell'Un. Mat. Ital. », 3, Anno V, (Marzo 1950), n. 1, pp. 72-77. In questa nostra Nota ci serviamo dei simboli e della nomenclatura del Lavoro citato.

(2) Cfr. l. c. in (1).

(3) Tale notissima condizione si omise nel l. c. (1).

2. Il Wronskiano $W_{\alpha,n}(x)$ di $L_n^{(\alpha)}(x)$, $l_n^{(\alpha)}(x)$, che sono due integrali linearmente indipendenti della

$$xy'' + (\alpha - x + 1)y' + ny = 0,$$

se α non è intero ([2]), è dato da

$$W_{\alpha,n}(x) = -L_n^{(\alpha)}(x)l_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) + L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)l_n^{(\alpha)}(x), \tag{4}$$

per x finito qualsiasi, $\alpha + 1 < 0$, poichè è ([4])

$$\frac{d}{dx}L_n^{(\alpha)}(x) = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x), \quad \frac{d}{dx}l_n^{(\alpha)}(x) = -l_{n-1}^{(\alpha+1)}(x).$$

Ma dalla formula di LIOUVILLE si ha

$$W_{\alpha,n}(x) = W_{\alpha,n}(1)e^{-\int_1^x \frac{\alpha - x + 1}{x}dx},$$

cioè

$$W_{\alpha,n}(x) = W_{\alpha,n}(1)e^{x-1}x^{-(\alpha+1)},$$

per qualunque x anche nullo, purchè $\alpha + 1 < 0$. Quest'ultima dà, a prescindere dalla costante $W_{\alpha,n}(1)$, il valore di $W_{\alpha,n}(x)$ che con il procedimento che segue ci è fornito insieme con il valore di $W_{\alpha,n}(1)$.

3. Eliminiamo tra la (2), la sua analoga per gli $L_n^{(\alpha)}(x)$ e la (4), rispettivamente $l_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$, $L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$, abbiamo così

$$\frac{1}{\alpha + n}xW_{\alpha,n}(x) = L_{n-1}^{(\alpha)}(x)l_n^{(\alpha)}(x) - l_{n-1}^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(x). \tag{4^1}$$

Se ora cambiamo nella precedente prima n in $n + 1$ e vi eliminiamo poi $l_{n+1}^{(\alpha)}(x)$, $L_{n+1}^{(\alpha)}(x)$ a mezzo delle

$$(n + 1)l_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (2n + \alpha + 1 - x)l_n^{(\alpha)}(x) - (\alpha + n)l_{n-1}^{(\alpha)}(x), \tag{5}$$

$$(n + 1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (2n + \alpha + 1 - x)L_n^{(\alpha)}(x) - (\alpha + n)L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \tag{6}$$

si ha la notevole formula ricorrente

$$W_{\alpha,n+1}(x) = \frac{\alpha + n + 1}{n + 1}W_{\alpha,n}(x). \tag{7}$$

Ma la (7) mutandovi successivamente n in $n - 1$, $n - 2, \ldots, 1, 0$ e moltiplicandola con le relazioni che si ottengono, dà, se si cam-

([4]) Cfr. l. c. in ([1]).

bia poi n in $n-1$

(7¹) $$W_{\alpha,n}(x)=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)n!}W_{\alpha,0}(x);$$

si è pertanto ridotti alla determinazione di $W_{\alpha,0}(x)$.

4. Si è stabilita la [5]

(8) $$l_{-1}^{(\alpha)}(x)=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(\alpha)e^{x}x^{-\alpha},\ \alpha \text{ non intero } <0,\ x \text{ finito qualsiasi},$$

la quale, cambiandovi α in $\alpha+1$, può scriversi

$$\frac{d}{dx}l_0^{(\alpha)}(x)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^x}{x^{\alpha+1}}.$$

Ora quest'ultima integrata dà (per la (3), $l_0^{(\alpha)}(0)=0$) per α non intero <0

(9) $$l_0^{(\alpha)}(x)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^x x^{-(\alpha+1)}dx,$$

ove si suppone x finito qualsiasi.

Pertanto dalla (4) se vi poniamo $n=0$ e notiamo che $l_0^{(\alpha)}(x)$ per $\alpha+1<0$, è finita per qualunque x finito, e che $L_{-1}^{(\alpha)}(x)=0$, abbiamo

$$W_{\alpha,0}(x)=-\,l_{-1}^{(\alpha+1)}(x)$$

cioè per la (8)

(10) $$W_{\alpha,0}(x)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^x}{x^{\alpha+1}}.$$

Se perciò portiamo nella (7¹) il valore di $W_{\alpha,0}(x)$ dato dalla (10), abbiamo infine la formula che si cercava

(11) $$\boxed{W_{\alpha,n}(x)=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)e^x}{n!\sqrt{2\pi}x^{\alpha+1}}}.$$

5. Se nella (4) poniamo $\alpha=-1/2$ e cambiamo x in $x^2/2$ si ha

(12) $$W_{-\frac{1}{2},n}\left(\frac{x^2}{2}\right)=-L_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x^2}{2}\right)l_{n-1}^{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x^2}{2}\right)+L_{n-1}^{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x^2}{2}\right)l_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x^2}{2}\right);$$

(5) Cfr. l. c. in (1), ove però nelle formule che danno $l_{-1}^{(\alpha)}(x)$ ed $l_{-2}^{(\alpha)}(x)$ si è trascurato l'irrilevante fattore costante $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

ma abbiamo

$$(13) \qquad L_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{(-1)^n}{n!\,2^n} H_{2n}(x), \qquad x L_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{(-1)^n}{n!\,2^n} H_{2n+1}(x)$$

e le analoghe per le rispettive funzioni di 2ª specie, essendo $H_n(x)$ ed $h_n(x)$ il polinomio e la funzione di 2ª specie d'ERMITE per i quali valgono le

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = n H_{n-1}(x), \qquad \frac{d}{dx} h_n(x) = n h_{n-1}(x);$$

quindi sostituendo nella (12) i valori dati dalle (13) ed analoghe si ha a mezzo della (11) la nota formula [6]

$$H_{2n}(x) h_{2n-1}(x) - H_{2n-1}(x) h_{2n}(x) = (2n-1)!\, e^{\frac{x^2}{2}}$$

che vale per x qualsiasi anche nullo come si desume dalla 2ª delle (13) e dalla (3).

L'ultima formula trovata però si ha assumendo m pari ed uguale a $2n$ nella seguente formula riportata dall'APPELL [6]

$$H_m(x) h_{m-1}(x) - H_{m-1}(x) h_m(x) = (m-1)!\, e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Allo scopo di trovare la formula con funzioni di LAGUERRE di 1ª e 2ª specie dalla quale particolarizzando si ha la precedente per m dispari, si cambi nella (4¹) α in $\alpha + 1$ e si aggiunga e sottragga $l_n^{(\alpha+1)}(x) L_n^{(\alpha+1)}(x)$, si ha così

$$\frac{x}{\alpha + n + 1} W_{\alpha+1,\, n}(x) = \left[- l_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) + l_n^{(\alpha+1)}(x) \right] L_n^{(\alpha+1)}(x) -$$

$$- \left[- L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) + L_n^{(\alpha+1)}(x) \right] l_n^{(\alpha+1)}(x),$$

cioè per la (1), se vi si muta n in $n + 1$, e per la (11)

$$L_n^{(\alpha+1)}(x) l_n^{(\alpha)}(x) - L_n^{(\alpha)}(x) l_n^{(\alpha+1)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1) e^x}{\sqrt{2\pi}\, n!\, x^{\alpha+1}} = W_{\alpha,\, n}(x)$$

che è appunto la formula che si cercava.

Difatti se in essa poniamo $\alpha = -1/2$ abbiamo appunto, tenendo presente le (13) ed analoghe, la detta formula per m dispari delle funzioni di 1ª e 2ª specie di HERMITE.

[6] Cfr. P. APPELL et J. KAMPÉ DE FÉRIET, *Fonctions Hypergéométriques et Hypersphériques - Polynomes d'Hermite*, Paris, Gauthier Villars. (1926), p. 360.

6. Dimostriamo che si ha

$$(14)\qquad l_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{2\pi}}\left[L_n^{(\alpha)}(x) I_\alpha(x) + P_n^{(\alpha)}(x)\frac{e^x}{x^\alpha}\right],$$

$$n \geq 0, \qquad \alpha + 1 < 0, \qquad x \text{ finito},$$

ove è

$$I_\alpha(x) = \int_0^x \frac{e^x}{x^{\alpha+1}}\, dx,$$

e $P_{n+1}^{(\alpha)}(x)$ è il polinomio di grado n in x definito dalle

$$(15)\qquad (n+1)P_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (2n+\alpha+1-x)P_n^{(\alpha)}(x) - (\alpha+n)P_{n-1}^{(\alpha)}(x),$$

$$(16)\qquad P_1^{(\alpha)}(x) = 1,$$

$$P_2^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2}(\alpha+3-x);$$

essendo inoltre $P_0^{(\alpha)}(x) = 0$.

Difatti se si sostituisce nella (5) il valore di $l_n^{(\alpha)}(x)$ dato dalla (14) e quello di $l_{n-1}^{(\alpha)}(x)$ che vi si trae, si ha per la (6) e la (15)

$$l_{n+1}^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{2\pi}}\left[L_{n+1}^{(\alpha)}(x) I_\alpha(x) + P_{n+1}^{(\alpha)}(x)\frac{e^x}{x^\alpha}\right],$$

si ha cioè la (14) stessa quando si cambia in essa n in $n+1$. Ma la (14), sussiste per $n=0$, $n=1$, quindi essa è vera in generale.

I polinomi $P_n^{(\alpha)}(x)$ che compaiono nella (14) li diciamo, come si è già avvertito, *associati* alle funzioni di LAGUERRE di 1ª e 2ª specie.

7. Una elegante formula relativa ai $P_n^{(\alpha)}(x)$ ed ai $L_n^{(\alpha)}(x)$ si ottiene immediatamente sostituendo nella (4[1]) al posto di $W_{\alpha,n}(x)$ il valore dato dalla (11) ed invece di $l_n^{(\alpha)}(x)$, $l_{n-1}^{(\alpha)}(x)$ i valori che si traggono dalla (14), si ha così

$$(17)\qquad L_n^{(\alpha)}(x)P_{n+1}^{(\alpha)}(x) - L_{n+1}^{(\alpha)}(x)P_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{(n+1)!\,\Gamma(\alpha+1)}$$

che insieme con la (16) può servire come altra definizione dei $P_n^{(\alpha)}(x)$.

8. La (17) può stabilirsi anche rapidamente sostituendo nella espressione $(n+1)S_{\alpha,n}(x)$, se con $S_{\alpha,n}(x)$ si indica il primo membro della (17), al posto di $P_{n+1}^{(\alpha)}(x)$ ed $L_{n+1}^{(\alpha)}(x)$ i valori dati rispettivamente dalla (15) e dalla (6), si ricava così

$$(n+1)S_{\alpha,n}(x) = (\alpha+n)S_{\alpha,n-1}(x),$$

da cui cambiando n in $n-1$, $n-2, \ldots, 2$, si trova col solito procedimento la (17), essendo $S_{\alpha,0}(x) = 1$.

9. In modo del tutto analogo utilizzando la (5) invece della (6) si stabilisce la

$$P_{n+1}^{(\alpha)}(x)l_n^{(\alpha)}(x) - P_n^{(\alpha)}(x)l_{n+1}^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{(n+1)!\sqrt{2\pi}} I_\alpha(x).$$

che è una formula ricorrente tra due soltanto delle $l_n^{(\alpha)}(x)$, $n \geq 0$.

10. La (4) e la (14) consentono di ricavare facilmente questa altra relazione

$$\frac{\sqrt{2\pi}x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)e^x} W_{\alpha,\,n}(x) =$$
$$= L_n^{(\alpha)}(x)L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) - (\alpha+1)L_n^{(\alpha)}(x)P_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) + xL_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)P_n^{(\alpha)}(x)$$

da cui a mezzo della (11) si ottiene, se si tiene presente che

$$(\alpha+1)I_{\alpha+1}(x) = I_\alpha(x) - \frac{e^x}{x^{\alpha+1}},$$

$$(\alpha+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x)P_n^{(\alpha+1)}(x) - xL_n^{(\alpha+1)}(x)P_{n+1}^{(\alpha)}(x) = L_{n+1}^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha+1)}(x) - L_{n+1}^{(\alpha)}(0)$$

che insieme con la (16) può utilizzarsi anch'essa per definire i $P_n^{(\alpha)}(x)$.

11. Si può far figurare nella (14) sia la funzione ipergeometrica confluente $\Phi(a, c, x)$ che la funzione γ incompleta ([7]).

Difatti è

$$a\int_0^1 e^{xt}t^{a-1}dt = \Phi(a,\ a+1,\ x), \quad a > 0, \tag{18}$$

ove appunto $\Phi(a, c, x)$ è la funzione ipergeometrica confluente di Pochammer-Kummer [spesso indicata anche con $G(a, c, x)$ e che è una degenerazione della funzione $F(a, b, c, x)$ ipergeometrica di Gauss].

Se nella (18) poniamo $t = u/x$, $a = -\alpha$, $\alpha < 0$, si ha

$$\int_0^x e^u u^{-(\alpha+1)}du = \frac{1}{a}x^{-\alpha}\Phi(-\alpha,\ -\alpha+1,\ x).$$

Pertanto la (14) può scriversi

$$l_n^{(\alpha)}(x) = \frac{-\Gamma(\alpha)}{x^\alpha\sqrt{2\pi}}\left[L_n^{(\alpha)}(x)\Phi(-\alpha,\ -\alpha+1,\ x) - \alpha e^x P_n^{(\alpha)}(x)\right],$$

([7]) Cfr. F. Tricomi, *Lezioni sulle funzioni Ipergeometriche confluenti*, Torino, Gheroni, (1952), (280 + 2 pp.), pp. 175-177.

in modo analogo si ha

$$l_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{2\pi}}\left[(-1)^\alpha L_n^{(\alpha)}(x)\gamma(-\alpha, -x) + P_n^{(\alpha)}(x)e^x x^{-\alpha}\right],$$

in cui appunto $\gamma(-\alpha, -x)$ è la funzione γ incompleta.

12. In questo e nel successivo *N.* stabiliamo due notevoli relazioni tra i polinomi $P_n^{(\alpha)}(x)$ e quelli di LAGUERRE e tra le funzioni di 1ª e 2ª specie quando in quest'ultima l'indice n è negativo.

Dalla [8]

$$l_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!}e^x x^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{\alpha+n}e^{-x}l_0^{(\alpha+n)}(x)\right], \tag{19}$$

ove $l_0^{(\alpha+n)}(x)$ si ottiene dalla (9), a mezzo della formula di LEIBNIZ relativa alla derivata ennesima di un prodotto e della

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^{\alpha+k}e^{-x}) = k!\,x^\alpha e^{-x}L_k^{(\alpha)}(x),$$

si ha

$$l_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1)}{\sqrt{2\pi}}\left\{L_n^{(\alpha)}(x)I_\alpha(x) + \frac{e^x}{x^\alpha}\left[\frac{-L_n^{(\alpha)}(x)}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{k=1}^n \Gamma(\alpha+k)x^{-k} + \right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)x^n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x)L_{k-1}^{(-\alpha-n-k)}(-x)\right]\right\}$$

che confrontata con la (14) dà

$$\Gamma(\alpha+1)x^n P_n^{(\alpha)}(x) = -L_n^{(\alpha)}(x)R_n(x) +$$
$$+\Gamma(\alpha+n+1)\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x)L_{k-1}^{(-\alpha-n-k)}(-x),$$

ove

$$R_n(x) = \sum_{k=1}^n \Gamma(\alpha+k)x^{n-k},$$

avendosi inoltre per questi polinomi la formula ricorrente

$$R_{n+1}(x) = xR_n(x) + \Gamma(\alpha+n+1).$$

Analogamente da una formula del TRICOMI [9], che tradotta nei nostri simboli scriviamo nella forma seguente

$$l_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!}e^x x^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{\alpha+n}e^{-x}l_0^{(\alpha)}(x)\right], \tag{20}$$

[8] Cfr. l. c. in [1].

[9] Cfr. F. TRICOMI, *La seconda soluzione della equazione di Laguerre*, « Boll. dell'Un. Mat. Ital. », 3, a. VII, (Marzo 1952), n. 1, pp. 1-4.

si ricava la più elegante formula

$$P_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x) L_{k-1}^{(-\alpha-k)}(-x). \tag{21}$$

Si noti la grande analogia che vi è tra la (19) e la (20).

13. La (5), essendo [10]

$$l_{-1}^{(\alpha)}(x) = -\frac{\Gamma(\alpha-1)}{\sqrt{2\pi}} e^x x^{-\alpha}(\alpha-1), \tag{22}$$

$$l_{-2}^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha-1)}{\sqrt{2\pi}} e^x x^{-\alpha}(x-\alpha+1). \tag{23}$$

dà una formula del tipo

$$l_{-n}^{(\alpha)}(x) = (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha-1)}{\sqrt{2\pi}} e^x x^{-\alpha} Q_{n-1}^{(\alpha)}(x), \tag{24}$$

in cui $Q_{n-1}^{(\alpha)}(x)$ è un polinomio di grado $n-1$ in x definito dalle

$$(\alpha-n)Q_n^{(\alpha)}(x) = (2n-\alpha-1+x)Q_{n-1}^{(\alpha)}(x) + (n-1)Q_{n-2}^{(\alpha)}(x),$$
$$Q_0^{(\alpha)}(x) = \alpha-1, \qquad Q_1^{(\alpha)}(x) = x-\alpha+1$$

come è facile verificare con il metodo d'induzione completa, servendosi appunto della (5).

Tale metodo consente inoltre di dimostrare che

$$Q_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha-1)} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (\alpha-n, i) x^{n-i},$$

la quale confrontata con

$$(-1)^n L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i(\alpha+n-i+1, i)}{i!\,(n-i)!} x^{n-i},$$

dà immediatamente la relazione seguente

$$Q_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha-n)\,n!}{\Gamma(\alpha-1)} L_n^{(-\alpha)}(-x).$$

Pertanto la (24) può scriversi se si cambia n in $n+1$

$$l_{-n-1}^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}\Gamma(\alpha-n)n!}{\sqrt{2\pi}} e^x x^{-\alpha} L_n^{(-\alpha)}(-x),$$

[10] Cfr. l. c. in [1]. In questo lavoro del prof. TRICOMI si trova un risultato analogo con lo stesso procedimento da noi già utilizzato per stabilire l'ultima formula del n. 5 del l. c. in [1].

in cui appunto sono messe in relazione le due funzioni di LAGUERRE di 1ª e di 2ª specie ma quest'ultime con indice negativo.

Si noti infine che tra $l_{-1}^{(\alpha)}(x)$ e $l_{-2}^{(\alpha)}(x)$ per le (22) e (23) intercede la relazione

$$(\alpha - x + 1) l_{-1}^{(\alpha-1)}(x) = x l_{-2}^{(\alpha)}(x).$$

In questo Lavoro del Prof. TRICOMI si trova un risultato analogo con lo stesso procedimento da noi già utilizzato per stabilire l'ultima formula del l. c. in (1).